



Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

## **Trabajo de investigación tutelada**

---

# **SIGNIFICADOS PUESTOS DE MANIFIESTO POR ESTUDIANTES DE E.S.O. RESPECTO AL CONCEPTO DE NÚMERO ENTERO. ESTUDIO EXPLORATORIO**

Miguel Vílchez Marín

Granada

Julio 2014



Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

**SIGNIFICADOS PUESTOS DE MANIFIESTO  
POR ESTUDIANTES DE E.S.O. RESPECTO  
AL CONCEPTO DE NÚMERO ENTERO.  
ESTUDIO EXPLORATORIO**

Trabajo de investigación tutelado realizado bajo la dirección del Doctor D. Luis Rico Romero del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Miguel Vílchez Marín para su aprobación por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Fdo.: Miguel Vílchez Marín

Vº Bº del profesor



Fdo.: D. Luis Rico Romero

El presente trabajo de investigación tutelado se ha realizado en el seno del grupo de investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento numérico (FQM-193) de la Universidad de Granada perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

*A Inma y Miguel, mis padres, por apoyarme  
y ayudarme en mi formación personal y  
profesional*

*A Pablo e Irene, mis hermanos, por  
ayudarme cuando lo he necesitado*

*A mi familia por su cariño*

*A mis profesores, que a lo largo de mi vida  
me han contagiado la afición por mi  
verdadera vocación: la enseñanza*

*A mis amigos/as, porque la vida con ellos  
se hace más llevadera*

# AGRADECIMIENTOS

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento al director de este trabajo, el Doctor D. Luis Rico Romero, por la dedicación, apoyo y paciencia que me ha brindado. Agradezco sus consejos y correcciones, que he tomado muy en cuenta a la hora de realizar este trabajo y que sin duda también me servirán en un futuro.

A los profesores del Máster en Didáctica de la Matemática que me han ayudado en mi formación como futuro investigador.

Al Colegio Cristo de la Yedra y su profesorado, por prestarme su ayuda siempre que lo he necesitado, que en este caso, sin ella, este trabajo no hubiera sido posible.

Por último, mostrar mi gratitud a todo aquel que ha colaborado de alguna forma en algún aspecto de este trabajo.

# ÍNDICE

## ÍNDICES DE TABLAS

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción.....	1
1.1.1. Diferentes significados.....	2
1.1.2. Características del trabajo.....	3
1.2. Objetivos de la investigación.....	4
<b>CAPÍTULO 2: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.....</b>	<b>5</b>
2.1. Antecedentes de la investigación.....	5
2.2. Significado.....	8
2.3. Representaciones.....	11
<b>CAPÍTULO 3: DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>13</b>
3.1. Tipo de estudio y descripción general.....	13
3.2. Sujetos, ciclo y nivel curricular.....	14
3.3. Elaboración del instrumento para la recogida de datos.....	15
Fase I: Revisión de literatura y elección de tareas.....	16
Fase II: Construcción del cuestionario final y tareas seleccionadas para el análisis.....	16
3.4. Procedimiento de aplicación del instrumento.....	17

3.5. Discusión sobre el alcance de los resultados (Fiabilidad/ Validez).....	18
<b>CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE DATOS.....</b>	<b>21</b>
4.1. Tipo de análisis realizado.....	21
4.2. Análisis de las respuestas a las actividades del cuestionario.....	22
4.3. Análisis de las actividades 1 y 2.....	23
4.3.1. Relaciones respecto a cero.....	23
4.3.2. Simbolización y notación.....	33
4.3.3. Términos clave.....	40
4.4. Análisis de las actividades 6 y 7.....	43
4.4.1. Verbos.....	43
4.4.2. Punto de referencia.....	49
4.4.3. Interpretación operacional.....	54
4.5. Análisis de la actividad 5.....	56
4.5.1. Punto de referencia.....	56
4.5.2. Verbos.....	58
4.5.3. Representaciones gráficas.....	60
<b>CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES FINALES.....</b>	<b>63</b>
5.1. Conclusiones del análisis de las actividades 1 y 2.....	64
5.1.1. Análisis en porcentajes.....	65
5.2. Conclusiones del análisis de las actividades 6 y 7.....	68
5.2.1. Análisis en porcentajes.....	70
5.3. Conclusiones del análisis de la actividad 5.....	72
5.4. Mapa conceptual.....	72
5.5. Logros y limitaciones de la investigación.....	75
5.6. Sugerencias para investigaciones futuras.....	76

<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>79</b>
<b>ANEXOS.....</b>	<b>84</b>

# ÍNDICE DE TABLAS

<i>Expresiones utilizadas en la actividad 1</i> .....	24
<i>Expresiones utilizadas en la actividad 2</i> .....	24
<i>Análisis sintáctico de las expresiones de la actividad 1</i> .....	25
<i>Análisis sintáctico de las expresiones de la actividad 2</i> .....	27
<i>Expresiones utilizadas en la actividad 1</i> .....	30
<i>Expresiones utilizadas en la actividad 2</i> .....	30
<i>Frecuencia de respuestas con un solo descriptor en la actividad 1</i> .....	35
<i>Desglose de los conceptos utilizados en la actividad 1</i> .....	36
<i>Desglose de los conceptos utilizados en la actividad 2</i> .....	37
<i>Combinaciones de descriptores en la actividad 1</i> .....	39
<i>Verbos que son utilizados en la actividad 6</i> .....	44
<i>Verbos que son utilizados en la actividad 7</i> .....	46
<i>Temáticas utilizadas en la actividad 7</i> .....	47
<i>Verbos que son utilizados en la actividad 7</i> .....	48
<i>Temáticas utilizadas en la actividad 7</i> .....	49
<i>Situaciones encontradas en la actividad 6</i> .....	50
<i>Análisis sintáctico de las respuestas</i> .....	50
<i>Análisis sintáctico de las respuestas</i> .....	51
<i>Situaciones encontradas en la actividad 5</i> .....	57
<i>Verbos que son utilizados en la actividad 5</i> .....	59
<i>Tipos de respuestas de la actividad 5</i> .....	60
<i>Porcentaje de respuestas de las actividades 1 y 2</i> .....	65

<i>Tipos de respuestas obtenidas dentro de la categoría de sentido.....</i>	<i>66</i>
<i>Tipos de respuestas obtenidas dentro de la categoría de signo en la actividad 1.....</i>	<i>66</i>
<i>Tipos de respuestas obtenidas dentro de la categoría de signo en la actividad 2.....</i>	<i>67</i>
<i>Tipos de respuestas obtenidas dentro de la categoría referencia en la actividad 1.....</i>	<i>67</i>
<i>Tipos de respuestas obtenidas dentro de la categoría referencia en la actividad 2.....</i>	<i>67</i>
<i>Combinaciones de las distintas categorías.....</i>	<i>68</i>
<i>Porcentajes de respuestas de las actividades 6 y 7.....</i>	<i>70</i>
<i>Tipos de comparaciones.....</i>	<i>71</i>
<i>Tipos de situaciones.....</i>	<i>71</i>

# ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 2.1. Triangulo semántico de Frege</i> .....	9
<i>Figura 2.2. Triangulo semántico de un concepto matemático escolar</i> .....	10
<i>Figura 4.1. Respuesta del alumno 1 a la actividad 1</i> .....	27
<i>Figura 4.2. Respuesta del alumno 2 a la actividad 1</i> .....	27
<i>Figura 4.3. Respuesta del alumno 1 a la actividad 2</i> .....	29
<i>Figura 4.4. Respuesta del alumno 2 a la actividad 2</i> .....	29
<i>Figura 4.5. Respuesta del alumno 3 a la actividad 1</i> .....	33
<i>Figura 4.6. Respuesta del alumno 3 a la actividad 2</i> .....	33
<i>Figura 4.7. Respuesta del alumno 4 a la actividad 1</i> .....	35
<i>Figura 4.8. Respuesta del alumno 5 a la actividad 1</i> .....	35
<i>Figura 4.9. Respuesta del alumno 6 a la actividad 2</i> .....	38
<i>Figura 4.10. Respuesta del alumno 7 a la actividad 1</i> .....	39
<i>Figura 4.11. Respuesta del alumno 8 a la actividad 1</i> .....	39
<i>Figura 4.12. Respuesta del alumno 8 a la actividad 2</i> .....	40
<i>Figura 4.13. Respuesta del alumno 9 a la actividad 1</i> .....	41
<i>Figura 4.14. Respuesta del alumno 9 a la actividad 2</i> .....	41
<i>Figura 4.14. Respuesta del alumno 10 a la actividad 1</i> .....	42
<i>Figura 4.15. Respuesta del alumno 10 a la actividad 2</i> .....	42
<i>Figura 4.16. Respuesta del alumno 11 a la actividad 6</i> .....	45
<i>Figura 4.17. Respuesta del alumno 12 a la actividad 7</i> .....	48
<i>Figura 4.18. Respuesta del alumno 13 a la actividad 6</i> .....	51
<i>Figura 4.19. Respuesta del alumno 14 a la actividad 6</i> .....	52

<i>Figura 4.20. Respuesta del alumno 2 a la actividad 6</i> .....	52
<i>Figura 4.21. Respuesta del alumno 15 a la actividad 7</i> .....	53
<i>Figura 4.22. Respuesta del alumno 2 a la actividad 7</i> .....	53
<i>Figura 4.23. Respuesta del alumno 16 a la actividad 6</i> .....	54
<i>Figura 4.24. Respuesta del alumno 17 a la actividad 7</i> .....	54
<i>Figura 4.25. Respuesta del alumno 16 a la actividad 7</i> .....	55
<i>Figura 4.26. Respuesta del alumno 18 a la actividad 7</i> .....	55
<i>Figura 4.27. Respuesta del alumno 19 a la actividad 5</i> .....	57
<i>Figura 4.28. Respuesta del alumno 20 a la actividad 5</i> .....	58
<i>Figura 4.29. Respuesta del alumno 16 a la actividad 5</i> .....	58
<i>Figura 4.30. Respuesta del alumno 18 a la actividad 5</i> .....	59
<i>Figura 4.31. Respuesta del alumno 21 a la actividad 5</i> .....	59
<i>Figura 4.32. Respuesta del alumno 4 a la actividad 5</i> .....	61
<i>Figura 5.1. Triángulo semántico de Frege</i> .....	73
<i>Figura 5.6. Mapa conceptual de la relación Referencia – Sentido</i> .....	73
<i>Figura 5.7. Mapa conceptual de la relación Referencia – Signo</i> .....	74

# CAPÍTULO 1

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

### 1.1. Introducción

Los números negativos presentan dificultades importantes cuando se enseñan a los alumnos. El mayor inconveniente para el aprendizaje de los escolares viene dado por las limitaciones para proporcionar significado a la idea de magnitud negativa, como a su vez les ocurrió a los matemáticos lo largo de la historia.

En algunos libros de texto encontramos una introducción formal de los números enteros a partir de los naturales, construcción que se hace como conjunto cociente del conjunto  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  mediante la relación  $R$  de equivalencia, dada por  $(m, n) R (m', n')$  si y solo si  $m+n' = m'+n$ . Pero parece claro que esta definición de número entero no es comprensible para el alumno de secundaria al inicio de su aprendizaje, por estar basada en los aspectos formales del concepto sin implicar ningún conocimiento o reflexión didáctica que le dote de sentido y facilite su intelección. Por ello pareciera más útil dedicar el tiempo escolar disponible a que los alumnos pudieran comprender el concepto de número entero, dotándolo de significado mediante sus modos de uso correctos en contextos diferentes. Es decir, utilizar significativamente las nociones básicas principales sobre número enteros.

La combinación de números y signos ya se trabaja en enseñanza primaria con números a los cuales precede el símbolo  $-$ , pero solo con el objeto de realizar una sustracción, por ello estas operaciones tienen limitaciones ya que “menos que cero no hay nada”. En el currículo actual, no se introduce el concepto de número entero como

tal hasta el primer ciclo de la educación secundaria obligatoria. Dentro de este concepto se incluyen los de valor absoluto, el orden en la recta numérica y la regla de los signos.

La concepción general de que el número es una abstracción de cantidades absolutas, ha supuesto un obstáculo histórico para el desarrollo matemático de los números negativos, situación que se suele reproducir en el aula escolar de matemáticas (Anexo VI).

En este sentido se provoca un obstáculo didáctico que es superable abordando las operaciones aritméticas desde el punto de vista de las transformaciones o acciones relativas, potenciando la estructura comparativa y el orden. Así los alumnos tendrán una visión de los negativos más fundamentada y con más sentido.

Otro desacierto didáctico consiste en la construcción formal de los números enteros sin un soporte que la sustente, sin un contexto al que dotar de sentido, lo cual la reduce a una formalización construida por pura abstracción. Con ella se pretende que el alumno comprenda que hay que ampliar  $\mathbb{N}$  con nuevos números (los negativos), de tal manera que ya se puedan considerar iguales  $2$  y  $+2$ , que es normal que coexistan en un mismo conjunto números con signo y sin signo, puesto que estos (los positivos) se pueden suprimir por comodidad, que tanto positivos como negativos cumplen una serie de reglas, unas intuitivas y otras no, aunque todas funcionan, y que desafortunadamente, no se pueden poner ejemplos contextualizados completos y validos

### **1.1.1. Diferentes significados**

Entre las estructuras numéricas usuales de los números enteros y los números naturales, compartimos la conjetura de González Marí (1998), quien postula la existencia de un tercer tipo de números a los que denomina números naturales relativos.

Distinguimos así entre número entero y número natural relativo (González Marí, 1998):

- Número natural relativo: Objeto conceptual concreto ligado a experiencias reales cantidades y medidas (como útil o como objeto en sí).
- Número entero: objeto conceptual abstracto o ente matemático ligado al saber matemático (como útil o como objeto en sí).

Vargas-Machuca (1990) distingue, desde el punto de vista de su sentido, entre

- El número natural relativo como cardinal, ordinal respecto a cero, medidas orientadas, comparación numérica, operador o transformación numérica.
- El número entero como objeto matemático, con significado formal.

No es trivial dotar de sentido a los números negativos.

Con respecto a los signos utilizados para identificar los números enteros, los símbolos  $+$  y  $-$ , se emplean, al menos, para representar tres nociones distintas: para expresar la distinción entre números positivos y negativos, para distinguir entre naturales relativos positivos y negativos y para representar las operaciones aritméticas usuales de adición y sustracción.

El proceso de enseñanza–aprendizaje del conjunto de los números enteros muestra una amplia diversidad de significados que sustentan los conceptos básicos de esta estructura numérica. Por ello su estudio proporciona una buena oportunidad para mostrar cómo se aborda el estudio de un concepto matemático escolar en términos del triángulo semántico cuyas componentes son los signos, sentidos y referencia o, en términos escolares, sus sistemas de representación, sus sentidos o modos de uso y sus estructuras formales (Rico, 2012).

### **1.1.2. Características del trabajo**

El trabajo que aquí se presenta es un estudio cualitativo realizado con estudiantes de segundo curso de educación obligatoria mediante el método de encuesta, con preguntas relativas a los significados que dichos estudiantes utilizan sobre el concepto de número entero. Estas cuestiones se plantean una vez transcurrido un tiempo de su presentación y trabajo en el aula, como preguntas personales, desvinculadas de toda evaluación.

Por su propósito, consiste en un estudio exploratorio y descriptivo, que se propone interpretar las concepciones de un grupo estándar de alumnos de segundo curso de educación secundaria obligatoria cuando se les interroga sobre planteamientos no formales de los números enteros.

Este estudio se aborda a partir de una revisión de estudios anteriores, que fue de ayuda para la elección de tareas para la elaboración del instrumento de recogida de información que utilizamos. La construcción de un cuestionario sobre las nociones de

números enteros, vinculadas a los objetivos que pretendemos alcanzar en nuestra investigación. Nuestro estudio se centra solo en la estructura aditiva de los números enteros, dejando de lado la estructura multiplicativa con las dificultades debidas a la regla de los signos.

El propósito que nuestro trabajo de investigación consiste en obtener respuesta a los siguientes interrogantes:

- ¿cómo los estudiantes expresan verbal y simbólicamente sus concepciones intuitivas sobre la noción número entero?
- ¿cómo interpretan y responden a diferentes tareas vinculadas con dicho concepto?

## **1.2. Objetivos de la investigación**

Objetivo general de esta investigación es:

“Explorar y describir los significados del concepto de número entero que los estudiantes de secundaria obligatoria muestran cuando responden a cuestiones y realizan tareas sobre dicho concepto”. Trabajo que, en nuestro caso, realizan los estudiantes por medio de diferentes sistemas de representación, verbal, gráfico y simbólico.

Los objetivos específicos en que se desglosa el objetivo general son:

- Identificar y describir los términos clave utilizados por los estudiantes encuestados cuando expresan su noción de número entero, realizar su análisis conceptual y establecer categorías para su interpretación.
- Identificar y describir situaciones enunciadas por los estudiantes cuando se les pide que representen determinados números enteros, así como analizar las expresiones utilizadas.
- Identificar y describir las representaciones gráfica utilizadas por los estudiantes para los números enteros, tanto de número positivo como de número negativo.

Para llevar a cabo este trabajo nos propusimos diseñar una encuesta, como instrumento para recoger información en registro verbal y simbólico referente a los aspectos del concepto de número entero antes enunciados.

# **CAPÍTULO 2**

## **FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA**

La fundamentación teórica del trabajo que incluimos en este capítulo trata tres aspectos relacionados con la investigación que hemos realizado. En primer lugar presentamos una revisión bibliográfica en la que se recogen resultados importantes que se han obtenido en estudios previos sobre el tema. No es una revisión exhaustiva, pero sí hemos recogido y seleccionado en ella un conjunto de trabajos por tratarse de investigaciones centradas en el estudio de los números enteros y su enseñanza en el ámbito de la educación secundaria. Los criterios seguidos también se refieren a las dificultades encontradas en su aprendizaje por los alumnos, o a una perspectiva histórica de lo que ha sido el papel de los números enteros. En segundo lugar, abordamos de manera breve la interpretación que damos a la noción de significado. Dadas las múltiples formas de entender esta noción en la literatura científica, hemos optado por precisar cuál es la utilizada en este trabajo. Por último, tratamos los sistemas de representación y, con ello, completamos los referentes básicos de este trabajo.

### **2.1. Antecedentes de la investigación**

En la búsqueda de documentos que trataran sobre el tema, hemos encontrado cierta dificultad para recopilar trabajos de diversa procedencia, también debido a que los trabajos de investigación encontrados están centrados en pocos autores.

Para la realización de la revisión bibliográfica se han utilizado: buscadores de internet como Google y Google scholar, el repositorio Digibug y bases de datos como Dialnet, Teseo, Scopus y WoS. Los términos clave utilizados fueron: números enteros, aprendizaje números enteros, whole numbers, dificultades números enteros, secundaria.

A continuación se presentan y describen, brevemente, algunas de las investigaciones centradas en el aprendizaje, las dificultades, el desarrollo, y la historia de los números enteros.

- González (1998) realiza su tesis doctoral sobre los números naturales relativos y publica un libro basado en esta. Este libro expone una parte de los principales resultados de un análisis epistemológico, fenomenológico, cognitivo y didáctico en el campo de los números naturales y enteros, en particular, a las cantidades y medidas discretas así como a las situaciones y problemas aritméticos involucrados en la educación del pensamiento numérico. Como consecuencia, se desarrolla un análisis teórico en el que constata la necesidad didáctica de considerar nuevos entes numéricos (números naturales relativos), con características diferenciadas de las que tienen los naturales y enteros. También presenta un estudio empírico con el que constata la diferencia en el plano cognitivo, y reafirma que el tratamiento didáctico usual de los números enteros presenta serias deficiencias que explica buena parte de los errores y dificultades detectadas en este campo.
- Vargas-Machuca, Jimeno e Iriarte (1990) publican un manual divulgativo de conocimiento didáctico, en el que se puede distinguir tres bloques diferenciados. El primero de ellos hace un repaso por la historia y la epistemología del concepto de número entero. El siguiente bloque que trata del análisis didáctico del concepto, hace un estudio de las vías de acceso a  $Z$ , de los métodos formales con un enfoque didáctico crítico y de los obstáculos y concepciones sobre números enteros. El tercer y último bloque es una propuesta didáctica en la que se integran las distintas opciones didácticas en una propuesta basada en un proceso único, dotando de nuevos significados a aspectos ya tratados en los bloques anteriores.
- Bell (1986) redacta un documento en el que resumen una investigación realizada a través de una prueba a alumnos. Explica y clasifica los errores conceptuales en situaciones de listas y escalas como ignorar el signo, confundir posición y movimiento. Esta es la clasificación que utiliza para el análisis de las respuestas, da los datos en porcentajes. Aparecen una serie de tablas en las que se clasifican con las respuestas según las categorías descritas anteriormente. Describe, también, la experiencia de una discusión de dos alumnas en torno a la respuesta

dada en una determinada pregunta, y otra experiencia en la que se muestra un enunciado que confunde al alumno. Después de realizar la prueba también tuvo entrevistas con los sujetos para comentar sus respuestas.

- Vargas-Machuca, Jimeno e Iriarte (1991) publican un artículo en el que desglosan las respuestas dadas en una prueba e interpretan el porqué de los errores que se cometen. Estas ideas obstaculizadoras las agrupan en:
  - Lo real como obstáculo: el apego a la evidencia inmediata, a la intuición primaria de número como cantidad, obstaculiza de múltiples formas la construcción de  $Z$ .
  - La imposición de lo formal como obstáculo: la construcción del conocimiento formal es un logro que requiere la ruptura de concepciones previas. Si no es así, lo formal queda vacío de significado, y se convierte en mera apariencia que no tarda en desaparecer.

Proponen algunas categorías para clasificar errores como por ejemplo: el número como expresión de cantidad, ignorar el signo, identificación de los símbolos literales como números positivos

- Gallardo, Santos y Hernández (2010). El documento encontrado se basa en un estudio histórico-epistemológico de la emergencia de los números negativos y el cero, identifican “sentidos de uso” de estos números tanto en autores de textos clásicos matemáticos como en estudiantes de secundaria actuales. El análisis de los sentidos de uso producidos por un alumno competente en el sistema matemático de signos del álgebra, revela los procesos cognitivos que lo conducirán paulatinamente al significado del número entero.
- Bruno (1997) resume las principales ideas teóricas, y da algunos resultados obtenidos a través de dos experiencias realizadas con estudiantes. Los alumnos siguieron un material preparado para la investigación, y respondieron a varias pruebas escritas y algunos de ellos fueron entrevistados. Como conclusión invita a modificar los currículos atendiendo a los resultados obtenidos.
- Becerra, Buitrago, Calderón y Gómez (2010). La experiencia de aula de esta investigación está basada en el diseño e implementación de una unidad didáctica que aborda los elementos que consideran necesarios para la solución de las dificultades que los estudiantes de grado séptimo encuentran al resolver situaciones de adición y sustracción de números enteros. Se presenta la

fundamentación del diseño de la unidad didáctica, seguido del análisis didáctico, la evaluación de la implementación, el balance de la experiencia y algunas reflexiones.

- Gallardo y Saavedra (2010). Esta investigación aporta elementos teóricos al estudio de las fracciones negativas, problemática poco abordada a nivel secundaria. Los resultados obtenidos apuntan a la necesidad de que los estudiantes dominen el significado de fracción positiva para poder dotar de sentido a la fracción negativa en problemas no rutinarios. El significado más frecuente de la fracción positiva encontrado en los alumnos, es el de “medida”, perteneciente al mecanismo constructivo de partición, éste permite concebir la fracción negativa, al igual que los significados de operador y cociente.
- Maz y Rico (2009). En este artículo se presenta una categorización sobre los fenómenos y las representaciones utilizados para presentar los números negativos en libros de texto de matemáticas publicados en España durante los siglos XVIII y XIX. Mediante un análisis de contenido en catorce textos seleccionados para el estudio, se distinguen cuatro tipologías de fenómenos: físicos, contables, temporales y matemáticos. También se identifican cuatro tipos de representaciones: verbales, numéricas, gráficas y algebraicas. Estos resultados reflejan en España un conocimiento y tratamiento de los números negativos al mismo nivel que el de otros países europeos de la época.

## **2.2. Significado**

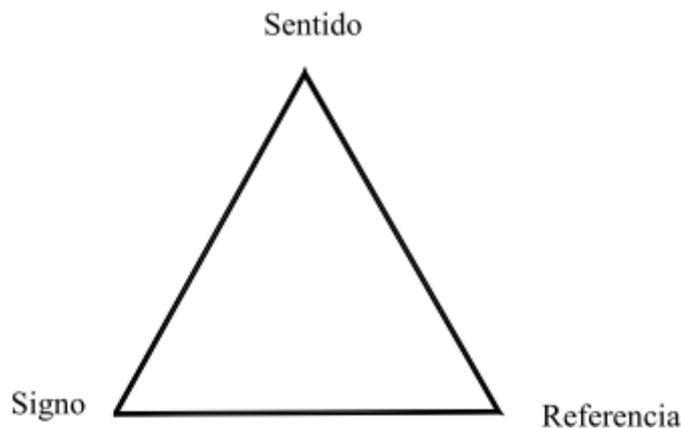
La extensión y profundidad de los significados que construyen los escolares en el aula (y, por consiguiente, la calidad de su aprendizaje) se realiza atendiendo los distintos modos de expresión y de uso con que se manejen los conceptos, a la capacidad para conectar diversas estructuras y utilizar diferentes procedimientos, a la diversidad de los problemas que pueden interpretarse, abordarse y resolverse, en definitiva, considerando la riqueza de conexiones —de significados— que se establecen para una determinada noción o conjunto de nociones matemáticas. (Gómez, 2007)

Por ello es necesario abordar la noción de significado en las matemáticas escolares desde una perspectiva amplia que vaya más allá del significado formal y

simbólico con el que tradicionalmente se identifican a estas matemáticas. Nos centraremos, entonces, en la noción de significado que da Frege.

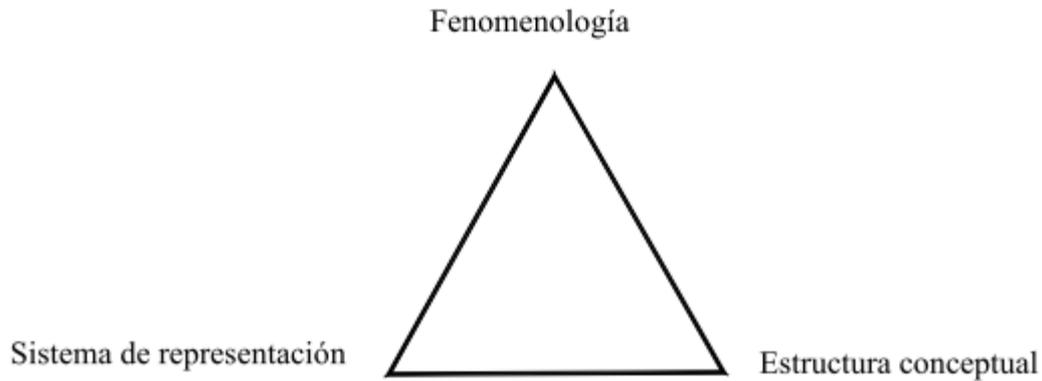
Presentamos la noción de significado que vamos a utilizar en este estudio. Revisaremos la discusión de Rico (2007) sobre la noción de significado derivada de los trabajos de Frege (1996a, 1996b, 1996c), que incluye como nociones fundamentales las de signo, referencia y sentido.

Frege (1996) estableció la diferencia entre signo y significado de un término y, dentro del significado, distinguió entre sentido y referencia de un mismo término. Establece, entonces, un triángulo semántico Signo—Sentido—Referencia, para los objetos, que viene dado por el signo o término con el que se expresa, por su referencia o concepto, y por su sentido o modo en que vienen dados los objetos que caen bajo el concepto. (Véase Figura 2.1.)



*Figura 2.1.* Triángulo semántico de Frege

La propuesta, expuesta por Rico (2007) e incluida por Gómez (2007), determina el significado de un concepto matemático escolar considerando tres componentes, los cuales vamos a utilizar en esta investigación para abordar el significado de los escolares sobre los números enteros. Dichos componentes se corresponden con la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología. (Figura 2.2.)



*Figura 2.2.* Triángulo semántico de un concepto matemático escolar

Damos la definición de Rico (2007) sobre los vértices del triángulo

- En los sistemas de representación incluimos las diferentes maneras en que se puede representar el concepto y sus relaciones con otros conceptos.
- En la estructura conceptual incluimos las relaciones del concepto con otros conceptos, atendiendo tanto a la estructura matemática de la que el concepto forma parte, como a la estructura matemática que dicho concepto configura.
- En la fenomenología incluimos aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que pueden dar sentido al concepto.

En nuestro caso en concreto, los números enteros, Gallardo (2010) recopila algunos de los “sentidos de uso” que se da al número negativo:

- Número sustractivo. Donde la noción de número se subordina a la magnitud. En la resta de dos cantidades  $a - b$ , siempre  $b$  será menor que  $a$ , donde  $a, b$  son números naturales, es decir, el signo menos sólo tiene un carácter binario a nivel de la operación de sustracción.
- Número signado. Es el número natural al que se le asigna un signo más o un signo menos. Surge la dualidad del signo: binario (signo de la operación de adición o sustracción) y unario (signo asociado al número natural).
- Número relativo. Cuando se concibe la idea de opuestos, en situaciones discretas así como la idea de simetría en situaciones continuas.
- Número aislado. Cuando se acepta un número negativo como resultado de una operación o solución de un problema o ecuación.

## 2.3. Representaciones

El concepto de representación «da por supuesto la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas». (Kaput, 1987)

Kaput opina que cualquier representación debería describir:

1. Los objetos representados.
2. Los objetos representantes.
3. Qué aspectos del mundo representado se representan.
4. Qué aspectos del mundo representante realizan la representación.
5. La correspondencia entre ambos mundos o conjuntos.

Como dice Sierra (1998), en general, tanto el mundo representante como el representado son entidades abstractas. Sin embargo, estos caracteres (letras, cifras, gráficos, etc.) son importantes en la representación y es básico para el aprendizaje del conocimiento y manejo.

El conjunto de símbolos y signos recibe distintas denominaciones: símbolos, sistemas de notación, sistemas semióticos o sistemas de representación.

En los conceptos matemáticos podemos distinguir entre representaciones internas, las que ocurren en la mente de cada individuo; y representaciones externas, signos y símbolos que se utilizan para la comunicación con los demás.

Estas dos nociones no se pueden separar, y el buen dominio de las representaciones externas lleva a una buena comprensión de los conceptos matemáticos lo que lleva a nuevas relaciones que pueden expresarse con distintas representaciones.

Un sistema simbólico está constituido por la colección de caracteres y las reglas para su procesamiento que los identifican, utilizados en la comunicación y el lenguaje matemático. Este conjunto posee significado en un contexto matemático.

El uso de los sistemas de representación en educación matemática es doble, ya que sirven tanto para la comunicación de conceptos, como para desarrollar la propia capacidad cognitiva de pensamiento ya que, manipulando sintácticamente los símbolos

o elaborando semánticamente referentes de dichos símbolos, se construyen nuevas relaciones y se profundiza en los conceptos representados incrementando el número de sus conexiones para un concepto o entre varios conceptos, enriqueciéndolos y aumentando su dominio sobre ellos. (Sierra, 1998)

En este trabajo vamos a considerar la definición de representación de Castro y Castro (1997), que dice así,

Las representaciones son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características más relevantes (...). Por representación entendemos cualquier modo de hacer presente un objeto, concepto o idea. Conceptos y procedimientos matemáticos se hacen presentes mediante distintos tipos de símbolos, gráficos o signos y cada uno de ellos constituye una representación.

En el cuestionario utilizado para la recogida de datos se han considerado las representaciones simbólicas, gráficas y verbales. Así mismo, nosotros hemos realizado al análisis de cinco de esas actividades, de las cuales solo una de ellas, la actividad 5, se considera la representación gráfica y simbólica y en el resto, la representación verbal.

# CAPÍTULO 3

## DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

### 3.1. Tipo de estudio y descripción general

Como hemos indicado en el planteamiento del problema, el concepto de número entero y, más concretamente, el concepto de número negativo, presentan dificultades cuando se exponen por primera vez. No es trivial darle sentido a los números negativos, ya que las cantidades negativas expresan una relación y no se presentan como estados en la vida cotidiana. Los alumnos tienen dudas sobre qué son esas cantidades negativas y tienden a confundir conceptos.

Por tanto, para nuestro tema de estudio consideraremos una aproximación a estos conceptos sustentada en su estructura conceptual, en sus diversas representaciones, y en las interpretaciones y contextos de los números enteros de manera que faciliten su conocimiento y comprensión global. Para ello es conveniente conocer el punto de partida de los estudiantes, sus nociones básicas, los conocimientos y destrezas sobre el tema y así actuar en consecuencia, orientando las intuiciones, corrigiendo errores o completando lagunas. Concretamente, como hemos expresado en el apartado 1.2 de esta memoria, la meta que nos hemos propuesto consiste en explorar los significados y representaciones que los alumnos de secundaria presentan sobre las nociones de número positivo y de número negativo.

La investigación que se expone es un estudio exploratorio, ya que se realiza con el objetivo de examinar un tema o problema de investigación, el cual analiza los significados que los alumnos dan a los números enteros, y que por la revisión de la literatura consultada, comprende aspectos que no se han abordado previamente. El marco teórico elegido se centra en los significados sobre un concepto relevante de las

matemáticas escolares, con un aparato crítico de análisis derivado del triángulo semántico de Frege. El estudio se ha planificado con la intención de recoger información sobre la comprensión de los estudiantes con el fin de disponer de información sobre las concepciones de los escolares relativas a este campo conceptual de la matemática escolar, información basada en datos y evidencias empíricas; la cual eventualmente servirá para diseñar propuestas de cambio e innovación curricular.

El estudio también es descriptivo en el sentido en que pretendemos describir el modo en que los estudiantes entienden, utilizan e interpretan determinadas nociones y conceptos. La muestra es intencional y por disponibilidad; no se pretende generalizar resultados en contextos más amplios, sino profundizar sobre ellos en un contexto determinado.

El instrumento de recogida de datos es un cuestionario cuyas tareas surgen de estudios previos, readaptadas, completadas y aplicadas en un nuevo contexto, asimismo de las reuniones mantenidas entre el investigador y su tutor el Dr. Rico.

En lo referente al análisis de datos llevado a cabo, se hace un análisis conceptual de términos clave, obteniendo categorías, que sigue un enfoque cualitativo en el análisis de las respuestas abiertas de los sujetos a los distintos ítems, basada en el método del análisis didáctico (Rico, 2012).

### **3.2. Sujetos, ciclo y nivel curricular**

La muestra de referencia del estudio consiste en el conjunto de estudiantes de 2º de E.S.O. del colegio “Cristo de la Yedra” de la ciudad de Granada en el curso 2013/2014. Esta muestra la consideramos representativa de los estudiantes del grupo social del que forman parte: alumnos de clase media, de un centro concertado, de ideario católico, en una capital de provincia, con nivel de desarrollo bajo dentro de España, como es el caso de la ciudad de Granada. Los estudiantes de este grupo social, cuya descripción detallada no es objeto de este trabajo pero cuyas características están documentadas, constituyen la población diana del estudio.

Previo a la implementación del cuestionario, el equipo investigador se puso en contacto con la directora de educación secundaria del colegio, D<sup>a</sup>. Lorenza Madrid

Villar, para estudiar la viabilidad, las condiciones y la fecha óptima para realizar dicha prueba. Tras consultar con los demás profesores y la junta directiva, éstos autorizaron la implementación del cuestionario a los tres grupos de 2º de E.S.O.

Según la información suministrada por los profesores responsables de la asignatura, los estudiantes han recibido instrucción previa sobre los conceptos de número entero durante el curso 2012/2013, según el temario de 1º de E.S.O., lo cual es importante tener en consideración. En el presente curso 2013/2014, en el momento de la aplicación del cuestionario, los estudiantes ya habían realizado las sesiones correspondientes a este tema y habían sido evaluados al respecto, lo cual puede influir en sus respuestas a las cuestiones planteadas. Por lo que, las concepciones que inframos del estudio, no serán espontáneas e intuitivas ya que tales concepciones, previas a la instrucción anterior, estarán mediadas por el libro de texto, por las propias concepciones del profesor y por el trabajo ya realizado en clase.

La elección de la muestra se elige por disponibilidad y la forman 31 alumnos. El tamaño de esta muestra también vino dado por otros factores. En principio, nuestro interés era realizar el cuestionario a todo el curso de 2º de E.S.O. (sobre unos 90 alumnos). Por normativa del colegio estas pruebas deben ser autorizadas por los padres de los alumnos por lo cual, para realizar el cuestionario, debían de entregar dicha autorización. El día de la implementación del cuestionario solo 38 alumnos aportaron el permiso. Dentro de esos 38, 7 recibían una reducción de contenidos en la asignatura de matemáticas, por lo que decidimos no incluir estos cuestionarios en los resultados analizados. La muestra es equilibrada con respecto al sexo de los sujetos: 15 alumnos y 16 alumnas.

### **3.3. Elaboración del instrumento para la recogida de datos**

El instrumento utilizado en el estudio para recoger información es un cuestionario con preguntas de respuesta abierta, elaboradas expresamente para este estudio. A continuación relatamos los pasos seguidos para su elaboración:

## **Fase I: Revisión de literatura y elección de tareas**

En esta fase se realizó una revisión de la literatura científica y de libros de texto para seleccionar un conjunto de actividades relacionadas con los números enteros.

Los documentos consultados y que nos fueron de ayuda para la elaboración del cuestionario fueron: González (1998), Vargas-Machuca y otros (1990), Bell (1986), Iriarte y otros (1991) y Guil y otros (2007).

En un primer recuento de actividades, fueron 8 las seleccionadas. Pero al detenernos en su análisis vimos que algunas actividades contenían demasiada información y se podían desdoblar en cuestiones independientes. La distribución de las actividades ha ido cambiando, según nuestro interés a la hora de cuál orden creíamos óptimo para una mejor respuesta por parte de los escolares.

## **Fase II: Construcción del cuestionario final y tareas seleccionadas para el análisis**

Finalmente fueron 12 las actividades que conformaron nuestro cuestionario. Debido al volumen de información recogido y a la extensión acotada de esta memoria, de las 12 actividades solo 5 son las analizadas en este estudio. Describimos brevemente estas actividades.

- Actividad 1. Explica verbalmente qué entiendes por número positivo.  
Actividad 2. Explica verbalmente qué entiendes por número negativo.  
Se espera que los alumnos en estas preguntas contesten de forma verbal, utilizando un lenguaje más coloquial o más técnico.
- Actividad 6: Describe una situación que se represente por  $-7$ .  
Actividad 7: Describe una situación que se represente por  $+3$ .  
Se espera que los sujetos expresen los diferentes sentidos por los que identifican a los números negativos (actividad 6) y a los números positivos (actividad 7).
- Actividad 5: Representa el número negativo  $-5$ , al menos de tres formas diferentes.

Nuestra intención es recoger diferentes representaciones gráficas de los números negativos.

Los resultados del resto de actividades incluidas en el cuestionario no serán analizados, pero están recogidas en el cuestionario incluido en el anexo I.

### **3.4. Procedimiento de aplicación del instrumento**

Cada cuestionario consta de un cuadernillo de 5 hojas en las que se incluía la siguiente información (Anexo I):

- Datos del grupo de investigación e identificación de la institución que realiza el estudio, presentación del objetivo del mismo, solicitud de ayuda, instrucciones y agradecimientos al encuestado.
- Datos de identificación del alumnado: edad, nombre, centro, curso y grupo.
- Cuestiones abiertas consecutivas distribuidas a lo largo de 4 hojas.

El procedimiento de aplicación del instrumento de recogida de datos fue el siguiente:

La implementación del cuestionario tuvo lugar el 30 de abril de 2014 en rango horario de 8:15-9:15 (1ª hora), en el colegio Cristo de la Yedra de Granada. En las clases destinadas al curso de 2º de E.S.O. Estas tienen unas puertas correderas que se abrieron para tener a todos los alumnos que realizaron el cuestionario en un mismo espacio. Los alumnos separaron sus mesas y se sentaron en formación de examen. El investigador, con ayuda de un profesor, repartió los cuestionarios.

Antes de comenzar a realizar el cuestionario, el investigador toma la palabra y explica el motivo de su presencia y las instrucciones a tener en cuenta para responder al cuestionario.

Durante la aplicación dos profesores estuvieron presentes junto al investigador. No hubo incidencias de relevancia durante la sesión de trabajo y el investigador resolvió las dudas que surgieron, intentando en todo momento reducir la información facilitada

al alumnado para, de este modo, controlar el posible sesgo que se pudiera producir en el posterior análisis de los datos. En opinión del investigador, gran cantidad de alumnos tuvieron dudas sobre las actividades 3 y 4. Por lo que en el posterior análisis se tuvo en cuenta esta circunstancia y no fueron consideradas para su estudio.

Con respecto al tiempo de realización, los alumnos disponían de una hora, pero el intervalo temporal que utilizaron fue de 20 a 40 min. Los cuestionarios fueron recogidos por el investigador en las mesas de los alumnos, un total de 38.

El investigador mostró su agradecimiento a los alumnos por su colaboración y, de modo especial, a los profesores presentes por haberle facilitado esa hora para la recogida de datos, y al colegio por su colaboración en la realización de este estudio.

Al finalizar la implementación, el investigador se reunió con un profesor para identificar los cuestionarios realizados por alumnos con reducción de contenidos. Como ya expusimos antes dichos cuestionarios no formaron parte de la muestra para el análisis de las respuestas.

### **3.5. Discusión sobre el alcance de los resultados (Fiabilidad/ Validez)**

La validez del cuestionario viene determinada por los documentos consultados para el diseño del instrumento y por la concordancia establecida entre los dos investigadores participantes en el estudio en el proceso de redacción y elección de las preguntas. La validez externa queda parcialmente cubierta por la revisión de antecedentes, la elección del marco teórico y la selección de tareas. La validez interna se ha controlado durante el proceso de elaboración del cuestionario y la triangulación de las interpretaciones de los resultados entre los investigadores.

La organización de los datos, su análisis e interpretación para llegar a los resultados, tiene las limitaciones propias de un estudio exploratorio. Algunas de las evidencias recogidas concuerdan también con resultados obtenidos en investigaciones previas. El carácter exploratorio del estudio y el tamaño de la muestra excluyen aplicar

algún test de fiabilidad. Por otra parte, la presencia de distractores en dicho instrumento han supuesto una limitación en la interpretación de los datos.



# CAPÍTULO 4

## ANÁLISIS DE DATOS

Concluida la aplicación del instrumento se procedió a identificar mediante un código cada uno los cuestionarios recogidos. Se trata de un código alfa numérico que consta de 6 casillas; las dos primeras corresponden a la inicial del nombre y primer apellido del alumno, la tercera casilla identifica el grupo al que pertenece el alumno, ya sea A, B o C y las dos últimas casillas corresponden al número asignado por orden alfabético de apellidos de cada alumnos, desde 01 hasta 31.

Con el fin de organizar la información recogida en las preguntas para su posterior análisis, se procedió al vaciado de todas las respuestas proporcionadas por los estudiantes a cada una de las cuestiones, escaneando la respuesta literal proporcionada en cada caso, como se ejemplifica en el anexo II.

Una vez volcados los datos, procedimos a la localización de términos clave que, según nuestro conocimiento sobre el tema y las propias respuestas, contenían el significado de los registros verbales. Debido a la pequeña cantidad de datos existente, el proceso de localización de términos clave se pudo realizar de manera exhaustiva.

### **4.1. Tipo de análisis realizado**

El análisis que se ha realizado a las respuestas obtenidas es de tipo cualitativo. En él se ha procedido a realizar una codificación, en la que se consideran segmentos o unidades simples de contenido que identifican hechos, conceptos y destrezas, a partir de los cuales se inducen categorías mediante su análisis y comparación.

El análisis cualitativo de los datos que llevamos a cabo consiste en un proceso inductivo, en el cual las categorías, relaciones y modelos aparecen a partir de los datos. Este proceso es cíclico en la medida que forma parte de todas las etapas de la investigación (McMillan y Schumacher, 2005, p. 478).

El método de procesamiento y revisión de la información que se lleva a cabo en este estudio es un análisis de contenido, el cual se realiza mediante la descomposición de las respuestas en sus unidades más simples, a partir de las cuales se sintetizan de modo sistemático unos temas y se identifican unas categorías (Rico, 2013, pp. 16-17).

El análisis tiene lugar en cuatro etapas: en la primera, se van a organizar los datos en temas; en la segunda, los temas se desarrollan en categorías; en la tercera, analizamos estas categorías: semejanzas, diferencias, vinculaciones,...; y finalmente en la cuarta, interpretamos los datos mediante las categorías y mostramos los resultados inferidos.

## **4.2. Análisis de las respuestas a las actividades del cuestionario**

Después de una primera lectura y observación cuidadosa de las respuestas de los alumnos a las actividades propuestas, identificamos y recogemos todas aquellas expresiones, representaciones, ideas y conceptos relevantes que se presentan en las mismas. Así surgen de manera natural y sistemática unos primeros descriptores, que identifican las unidades de información, con las que se reducen y organizan en temas la diversidad de respuestas obtenidas. (Anexo III)

Así mismo, una vez descritas las respuestas en términos de los correspondientes descriptores, observamos que hay respuestas que siguen un mismo patrón y, salvo alguna variación, se pueden clasificar mediante combinaciones de los temas que inicialmente se han elaborado. En el anexo III se pueden ver las tablas de cada actividad analizada donde aparecen dichos descriptores. Las actividades cuyo análisis se hace a continuación son, y por este orden, las que tienen los números 1, 2, 6, 7 y 5.

### **4.3. Análisis de las actividades 1 y 2**

Los enunciados de dichas actividades son:

- Actividad 1. Explica verbalmente qué entiendes por número positivo.
- Actividad 2. Explica verbalmente qué entiendes por número negativo.

Como hemos descrito anteriormente, se desglosaron las respuestas atendiendo a una serie de términos y relaciones, a los que llamamos descriptores de las respuestas. Después de revisar un primer desglose de las respuestas mediante los descriptores detectados, hemos percibido que las actividades 1 y 2 siguen una misma pauta en sus respuestas, con las mismas o similares combinaciones de descriptores y, en ocasiones, con las mismas expresiones. Esta coincidencia se produce porque la mayoría de los alumnos utilizan las mismas expresiones para contestar a ambas actividades, con el correspondiente cambio de términos en ocasiones al responder a cada una de ellas.

Por ello, hemos decidido hacer un análisis paralelo de las actividades 1 y 2. A continuación se presentan los distintos descriptores y sus combinaciones, con los cuales se mostrará el análisis hecho para la actividad 1, seguido del análisis para la actividad 2.

#### **4.3.1. Relaciones respecto a cero**

Hemos observado que la columna del descriptor “posición” es la de más frecuencia. Además, es curioso que en todas las respuestas con este descriptor, excepto en uno, esté marcado igualmente el descriptor cero. Algo similar ocurre con el descriptor orden. Por ello nos parece conveniente tomar como categoría las relaciones con respecto a cero en las definiciones de positivo y negativo dadas por los alumnos.

Analizamos minuciosamente las respuestas según su estructura gramatical y los conceptos utilizados en las expresiones que aparecen; en esta primera aproximación encontramos tres argumentos diferentes para la explicación verbal solicitada: primero, mediante una relación posicional, segundo, mediante una relación de orden o comparación y, en tercer lugar, por una combinación de las anteriores. En todas ellas el cero es el punto de referencia para la relación con la que los sujetos responden a la pregunta realizada.

**Relación posicional respecto a cero**

Uno de los argumentos que hemos identificado se basa en los distintos modos de expresar las relaciones con 0. En un primer nivel hemos clasificado aquellas respuestas que expresan una relación de posición.

La tabla 4.1. y 4.2. muestra las expresiones que entendemos pueden clasificarse en esta categoría, recogidas en esta actividad, junto con su frecuencia.

Tabla 4.1.

*Expresiones utilizadas en la actividad 1*

Expresión utilizada	Número de respuestas
A la derecha de 0	2
Por encima de 0	9
Desde 0 hacia arriba	1
Después de 0	1
Detrás de 0	1
Antes del –	1
Para arriba de 0	1

Tabla 4.2.

*Expresiones utilizadas en la actividad 2*

Expresión utilizada	Número de respuestas
A la izquierda de 0	2
Por debajo de 0	11
Desde 0 hacia abajo	1
Antes de 0	1
Delante de 0	1
Después del +	1

Como podemos observar, todas las expresiones utilizadas para definir número positivo y número negativo poseen la misma estructura gramatical: una expresión compuesta por complementos circunstanciales, un sustantivo o expresión sustantivada y una preposición que las enlaza.

Esta clase de expresión se denomina *relación preposicional* y consta de: (RAE, 1991)

- *Termino de la preposición:* es siempre un sustantivo o una palabra o expresión a él equivalente en su función gramatical.
- *El elemento sintáctico inicial:* es aquel de donde parte la relación, se inicia por una palabra de plena significación, es decir un verbo, un sustantivo, un adjetivo o un adverbio. Subordina a la preposición con su término. Por esto se dice que rige a determinadas preposiciones o que se construye con ellas.
- *Preposición:* es una partícula proclítica (salvo según) que encabezan un complemento nominal de otra palabra y lo subordina a ella.

A continuación se muestra la descomposición de las expresiones anteriores en los elementos acabados de definir (Tabla 4.3.).

Tabla 4.3.

*Análisis sintáctico de las expresiones de la actividad 1*

Elemento sintáctico inicial	Preposición	Termino de la preposición
A la derecha	De	0
Por encima	De	0
Después	De	0
Detrás	De	0
Para arriba	De	0
Antes	De	El –
Hacia arriba	Desde	0

En la mayoría de expresiones es utilizada la preposición *de* para expresar relaciones, en este caso posición. Su función es la de enlace entre los complementos de

un sustantivo y éste. De la misma manera aparece la preposición *desde* que sirve para denotar principio de tiempo o de lugar, cumple la misma función que la preposición *de*.

Todos los elementos sintácticos iniciales son complementos circunstanciales de lugar. Realizamos un análisis de cada uno de ellos.

1. A la derecha: es una frase sustantiva introducida por la preposición *a*, que denota la posición; derecha, con respecto a algo, en este caso el cero.
2. Por encima: es una locución adverbial introducida por la preposición *por*, denota posición, la parte superior de algo, en este caso 0.
3. Después: es un adverbio tanto de lugar como de tiempo. En este caso por el contexto denota posición, con posterioridad respecto de 0.
4. Detrás: adverbio de lugar, en la parte posterior, en este caso, de 0.
5. Para arriba: es una locución adverbial introducida por la preposición *para*, denota posición, en la parte alta, respecto de 0, en este caso.
6. Antes: es un adverbio tanto de lugar como de tiempo. En este caso por el contexto denota posición, con anterioridad respecto al signo menos.
7. Hacia arriba: es una locución adverbial introducida por la preposición *hacia*, denota posición, en la parte alta, respecto de 0, en este caso.

Una vez analizadas las expresiones sintácticamente, damos algunas observaciones con respecto a las respuestas.

- Las expresiones 2 y 5, denotan la misma dirección aunque utilizan expresiones diferentes. Expresan la relación mediante un criterio espacial o respecto de un sistema posicional; parecen considerar los números en una determinada posición espacial respecto de 0. La expresión 2 es la más usada por los alumnos.
- Análogamente, las expresiones 1 y 3 no contemplan una posición espacial determinada sino solo relativa a otra.

- La respuesta literal de la expresión 4 fue la que aparece en la figura 4.1.

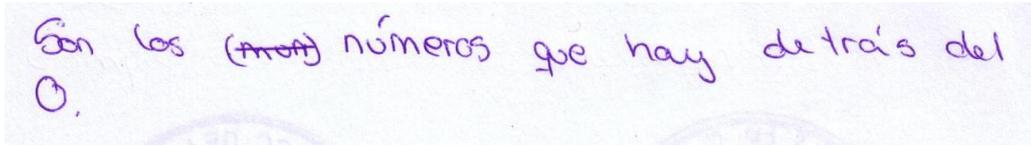


Figura 4.1. Respuesta del alumno 1 a la actividad 1

Parece ser que el alumno sitúa los números en dirección contraria a la usual.

- Respecto a la expresión 6, la respuesta literal que dio el sujeto fue: (Figura 4.2.)

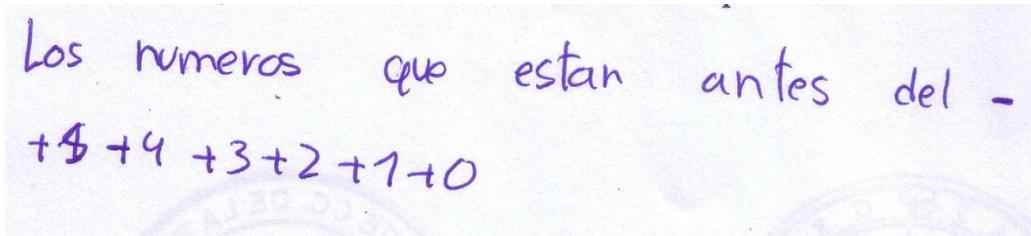


Figura 4.2. Respuesta del alumno 2 a la actividad 1

Según su representación es correcta su respuesta pero desconocemos la razón de por qué escribe los números en orden inverso al usual. Este sujeto cambia el punto de referencia (término de la preposición) que venía siendo utilizado en las demás respuestas, el 0, por otro punto de referencia, en este caso el  $-$ .

Realizamos el mismo proceso con la actividad 2.

Tabla 4.4.

*Análisis sintáctico de las expresiones de la actividad 2*

Elemento sintáctico inicial	Preposición	Termino de la preposición
A la izquierda	De	0
Por debajo	De	0
Antes	De	0
Delante	De	0
Después	De	El $-$
Hacia abajo	Desde	0

En todas, menos en una, las expresiones es utilizada la preposición *de* para expresar relaciones, en este caso de posición. Su función es la de enlace entre los complementos de un sustantivo y éste. De la misma manera aparece la preposición *desde* que sirve para denotar principio de tiempo o de lugar, cumple la misma función que la preposición *de*.

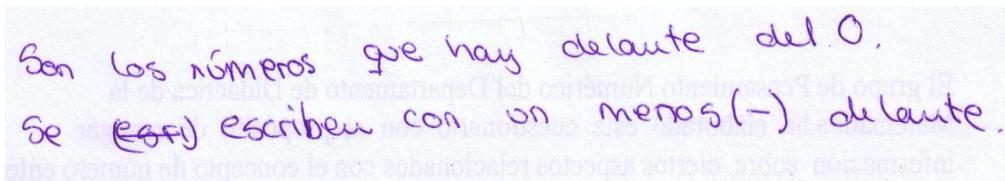
Todos los elementos sintácticos iniciales son complementos circunstanciales de lugar. Realizamos un análisis de cada uno de ellos.

1. A la izquierda: es una frase sustantiva introducida por la preposición *a*, que denota la posición; izquierda, con respecto a algo, en este caso el cero.
2. Por debajo: es una locución adverbial introducida por la preposición *por*, denota posición, la parte inferior de algo, en este caso 0.
3. Antes: es un adverbio tanto de lugar como de tiempo. En este caso por el contexto denota posición, con anterioridad respecto a 0.
4. Delante: adverbio de lugar, en la parte anterior, en este caso, de 0.
5. Después: es un adverbio tanto de lugar como de tiempo. En este caso por el contexto denota posición, con posterioridad respecto al signo +.
6. Hacia abajo: es una locución adverbial introducida por la preposición *hacia*, denota posición, parte baja de algo, en este caso 0.

Una vez analizadas las expresiones sintácticamente, damos algunas observaciones con respecto a las respuestas.

- La expresión 2 expresa la relación mediante un criterio espacial o respecto de un sistema posicional; parece considerar los números en una determinada posición espacial respecto de 0. Es la construcción más utilizada por los alumnos a la hora de responder a la actividad.
- Análogamente, las expresiones 1 y 3 no contemplan una posición espacial determinada sino solo relativa a otra.

- La respuesta literal de la expresión 4 fue:

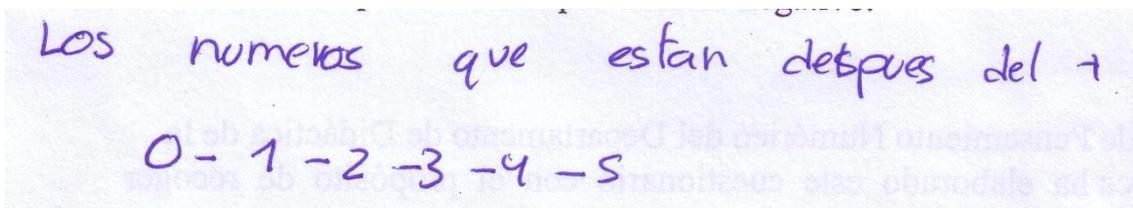


Son los números que hay delante del 0.  
Se (est) escriben con un menos (-) delante.

Figura 4.3. Respuesta del alumno 1 a la actividad 2

Este alumno parece situar los números en dirección contraria a la usual. Aunque sí tienen claro la notación que poseen los números negativos.

- Respecto a la expresión 6, la respuesta literal que dio el sujeto fue:



Los números que están después del +  
0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5

Figura 4.4. Respuesta del alumno 2 a la actividad 2

Según la representación utilizada esta respuesta es correcta pero desconocemos por qué escribe los números de forma inversa a la usual. Este sujeto cambia el punto de referencia (término de la preposición) que venía siendo utilizado en las demás respuestas, el 0, por otro punto de referencia, en este caso el -1.

### **Relación de comparación respecto a cero**

Un segundo nivel que hemos detectado consta de las respuestas a las actividades citadas cuyas expresiones reflejan una situación de comparación.

Las tablas 4.5. y 4.6. muestran las expresiones recogidas que hemos clasificado en este nivel, junto con su frecuencia en cada caso.

Tabla 4.7.

*Expresiones utilizadas en la actividad 1*

Expresiones utilizadas	Número de respuestas
Mayor que 0	1
Supera el valor de 0	1
Siguen un orden a partir de 0	1
Son superiores a 0	1

Tabla 4.6.

*Expresiones utilizadas en la actividad 2*

Expresiones utilizadas	Número de respuestas
Menor que 0	2
Tiene un valor inferior a 0	1
Siguen un orden inverso a partir de 0	1
Son inferiores a 0	1

Observamos que las expresiones utilizadas tienen algo en común, y es que todas ellas utilizan un vocabulario técnico, específico del ámbito de las matemáticas y no tan habitual y corriente como en el nivel anterior.

Analizamos cada una de esas expresiones:

*Actividad 1*

- *Mayor que:*

Expresión matemática que se representa mediante el símbolo  $>$ . Significa la relación entre dos números cuando la diferencia entre el primero y el segundo es un número positivo; en tal caso, se dirá que el primero es mayor que el segundo. Cumple la propiedad transitiva. Es el comparativo de grande. (WordPress, 2014)

- Supera el valor de 0:  
Por si sola la palabra superar, en una de las acepciones de la RAE, significa rebasar, sobrepasar una cantidad o valor tomado como referencia. Esta expresión no hace más que reiterar esta definición, atribuyendo a 0 la cualidad de valor.
- Siguen un orden a partir de 0:  
Orden: Se dice que los números reales, en este caso los enteros, son ordenados porque satisfacen la tricotomía, es decir, dados dos números cualesquiera, se cumple una y solamente una de las siguientes condiciones:  $a < b$ ,  $a = b$  ó  $a > b$ . (Soto, 2011)  
Dada esta definición de orden, la expresión que el sujeto escribe hace referencia a que dicho orden comienza desde el número cero, pero por la información que nos proporciona la respuesta, desconocemos si ese orden sigue hacia adelante o hacia atrás, hacia arriba o hacia abajo.
- Son superiores a 0:  
En la enseñanza primaria “superior” se emplea a menudo por “estrictamente superior” y  $\geq$  se lee “superior o igual a”, o también “mayor que”. (Bouvier y George, 1986). Por lo que esta expresión nos refleja la situación explicada en “mayor que”.

## Actividad 2

- Menor que:  
Expresión matemática que se representa mediante el símbolo  $<$ . Significa que la relación entre dos números cuando la diferencia entre el segundo y el primero es un número positivo; en tal caso, se dirá que el primero es menor que el segundo. Cumple la propiedad transitiva. Es el comparativo de pequeño. (WordPress, 2014)
- Tiene un valor inferior a 0:  
Como en el caso de superior, tomamos una de las acepciones de la RAE que dice: que es menor que otro en cantidad, calidad o importancia. En este caso, a lo que es menor es a su valor y el elemento con el que se compara es el 0.

- Siguen un orden converso a partir de cero:

Tomamos la definición de orden referenciada antes (Soto, 2011).

Esta expresión introduce un nuevo concepto, converso. Si buscamos la definición de converso en el ámbito de la lógica, que es aquel que nos interesa, aparece de la lógica aristotélica, y dice así: Dada la proposición condicional  $p \rightarrow q$ , su conversa es  $q \rightarrow p$ . Se relaciona el concepto converso con el concepto de recíproco.

Si nos vamos al idioma inglés y buscamos la palabra “converse” una de sus acepciones es “Lo contrario de una declaración es su opuesto o inverso”. Es decir en este caso sería lo opuesto o inverso al orden que hemos definido comenzando desde el número cero. Pero de nuevo, por la información que nos proporciona la respuesta, desconocemos si ese orden sigue hacia adelante o hacia atrás, hacia arriba o hacia abajo.

- Son inferiores a 0:

La misma fórmula que para “tiene un valor inferior a 0” con la salvedad que en este caso no precisa que de qué está hablando. Da por supuesto la interpretación de 0, que puede ser como valor, cantidad.

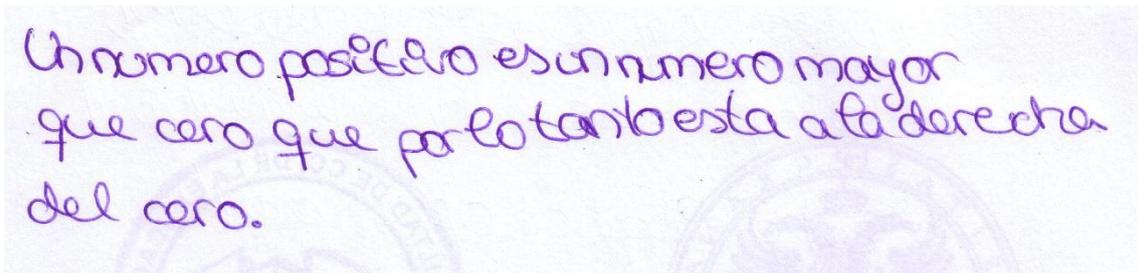
Debido a este análisis de las expresiones, hemos observado los puntos en común y consideramos este nivel donde se albergan aquellas respuestas que manifiestan un concepto de comparación.

### **Relación de posición y de comparación respecto a cero**

Hemos querido realizar otro nivel diferente para destacar un tipo de respuesta que combina los dos niveles anteriores. Aunque solo ha aparecido una respuesta de este tipo en cada actividad que pertenece al mismo sujeto, nos ha parecido interesante mencionarla aparte. No obstante, esta respuesta está contabilizada en las respuestas de los dos niveles anteriores.

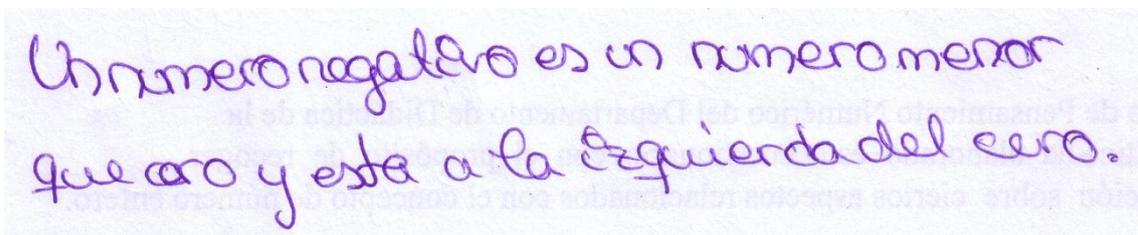
Presentamos el escáner de la respuesta del cuestionario original correspondiente a las actividades:

*Actividad 1*



*Figura 4.5.* Respuesta del alumno 3 a la actividad 1

*Actividad 2*



*Figura 4.6.* Respuesta del alumno 3 a la actividad 2

Como ya hemos dicho estas respuestas contienen una combinación de los niveles anteriores. El sujeto hace una conexión entre relación de comparación respecto a cero y la relación de posición con respecto a cero.

En la primera respuesta nos muestra que el sujeto hace la reflexión de que ser mayor que cero implica estar a la derecha (y no arriba). De la misma manera, que en la segunda respuesta relaciona el ser menor que cero con estar a la izquierda (y no abajo).

Estas cuatro relaciones implicadas en las respuestas (mayor que, menor que, a la derecha, a la izquierda) están explicadas en los párrafos anteriores.

Por todo ello, nos parece que el sujeto hizo una reflexión más amplia al relacionar los dos tipos de relaciones con respecto a cero.

### **4.3.2. Simbolización y notación**

Otra de las categorías que surgen proviene de la clasificación de las respuestas que utilizan un sistema de signos para expresar conceptos matemáticos, en este caso, los números positivos y negativos.

Al realizar el desglose de las respuestas en descriptores, hemos observamos que aparecen distintos descriptores relacionados con la simbología, a saber:

#### *Actividad 1*

**Signo +**: En este descriptor hemos incluido las respuestas (o parte de ellas) que definen a los números positivos como aquellos en cuya representación simbólica aparece un signo +.

**Signo -**: Se incluyen las respuestas (o parte de ellas) que definen a los números positivos como aquellos en cuya representación simbólica no aparece el signo -.

**Sin signo**: Se incluyen las respuestas (o parte de ellas) que definen a los números positivos como aquellos en cuya representación simbólica no aparecen signo.

#### *Actividad 2*

**Signo +**: En este descriptor hemos incluido las respuestas (o parte de ellas) que definen a los números negativos como aquellos en cuya representación simbólica no aparece un signo +.

**Signo -**: Se incluyen las respuestas (o parte de ellas) que definen a los números negativos como aquellos en cuya representación simbólica aparece el signo -.

Ahora bien, las respuestas agrupadas en esta categoría, puede que hayan sido clasificadas en uno solo de estos descriptores o en varios de ellos. Por ello vamos a realizar un análisis de estas respuestas según el número de descriptores utilizados para su clasificación.

**Con solo un descriptor**

*Actividad 1*

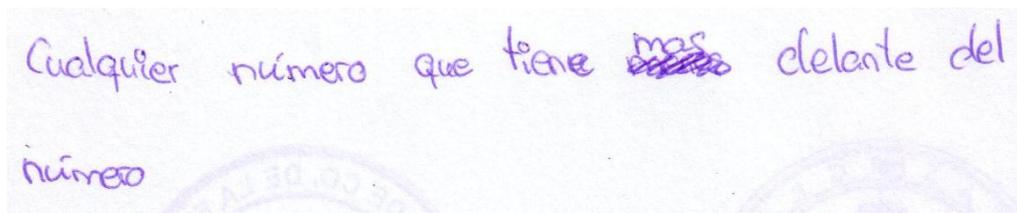
Tabla 4.7.

*Frecuencia de respuestas con un solo descriptor en la actividad 1*

Descriptor	Número de respuestas
Signo +	1
Sin signo	1
Signo -	6

1. Signo +:

Para este descriptor la respuesta literal fue:

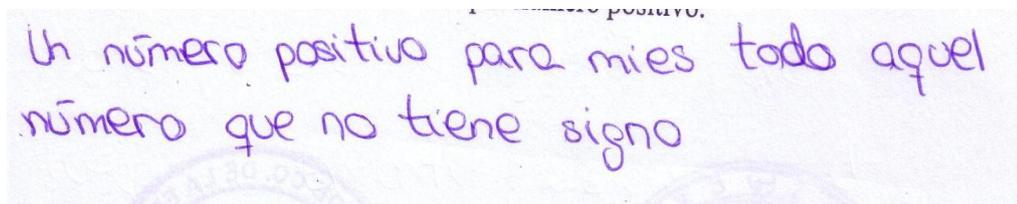


*Figura 4.7.* Respuesta del alumno 4 a la actividad 1

El sujeto además de identificar con un signo el número positivo, le adjudica a ese signo una posición, delante del número.

2. Sin signo:

La respuesta del alumno fue:



*Figura 4.8.* Respuesta del alumno 5 a la actividad 1

El alumno no le da más caracterización al número positivo que la de no llevar signo.

## 3. Signo –:

Como vemos en la tabla, con gran diferencia, de aquellas respuestas que utilizan solo un descriptor simbólico para su definición, se decantan por explicar que los positivos son aquellos que no utilizan el signo menos para su representación.

Analizando las frases que emplean para definir comprobamos que utilizan diferentes conceptos para expresar la misma idea, en la tabla 4.8. hacemos el recuento de los conceptos utilizados en las respuestas.

Tabla 4.8.

*Desglose de los conceptos utilizados en la actividad 1*

Concepto	Número de respuestas
–	3
Menos	1
Negativo	2
Símbolo	2
Signo	3
Antes	1
Delante	2

Se puede observar que el concepto negativo es utilizado con diferentes palabras o signos en todas las respuestas (–, menos, negativo) ya que el total de su frecuencia son 6.

No ocurre lo mismo con las siguientes, signo o símbolo es utilizado en 5 respuestas, por lo que queda una en la que no se menciona este concepto. En este caso, el sujeto fue menos preciso, ya que el fragmento de su respuesta fue “número que no tenga un menos delante”.

Por último, solo la mitad de las respuestas le proporcionaron al signo una posición, ya sea, delante o antes.

Otro dato a tener en cuenta es que todos los sujetos aplican el verbo *tener* para explicar esta propiedad de los números positivos. Ejemplo: “No tienen delante el signo negativo”.

*Actividad 2*

En este caso, en la actividad 2, las respuestas que solo utilizan un descriptor son 11 y todas ellas emplean el mismo: explican que los negativos son aquellos que utilizan el signo menos para su representación.

Analizamos las expresiones de las que se valen los sujetos para definir la misma idea. Al realizar este desglose de conceptos, no hemos encontrado un patrón que se repita. Por lo que no hemos podido agrupar las respuestas por los términos en común que utilizan. Así que, al igual que la tabla anterior, hacemos el recuento de los conceptos utilizados en la tabla 4.9.

Tabla 4.9.

*Desglose de los conceptos utilizados en la actividad 2*

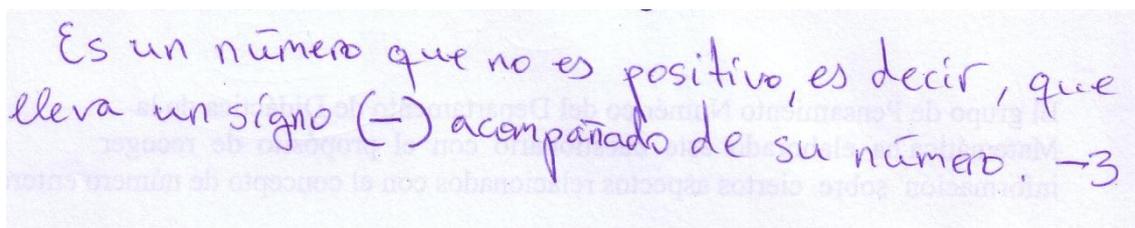
Concepto	Número de respuestas
Llevar	2
Tener	7
Escribir	1
Símbolo	3
Signo	5
–	8
Menos	3
Negativo	1
Antes	1
Delante	8
Acompañado	1

Todas las respuestas, excepto una, contienen un verbo, una acción que se le otorga al número negativo (número que lleva un símbolo – delante). En el caso del verbo *escribir* la respuesta literal del sujeto fue: “se escriben con un menos delante”. El sujeto no le atribuye la posesión del signo al número negativo, como en los casos de llevar o tener.

De las 11 respuestas, solo 8 hacen uso de los términos símbolo o signo para referirse al número negativo. Las demás no son tan precisas y solo se limitan a escribir: “con un menos” o “tiene un –”.

En cuando a la referencia de lo negativo, utilizan los términos: –, menos, negativo. Como se puede observar la suma de sus frecuencias resulta 12, uno más que las respuestas, esto es debido a que en una de ellas aclara el término escribiendo: “tienen símbolo menos (–) delante”. Parece que el alumno quiere hacer una aclaración o reafirmar lo ya dicho, es decir, nos da dos formas de representación de signo menos.

Respecto a la posición, 10 de las respuestas hacen referencia a ella. Aquel que no lo hace solo escribe: “tiene símbolo –”. Está claro que para la mayoría de ellos es importante denotar la posición que ocupa el signo menos. En una de las respuestas se utiliza la palabra *acompañado*, no es exactamente un término de posición pero el alumno acompaña esta definición con un ejemplo por lo que hemos decidido clasificar este término dentro de posición. Véase la respuesta literal (Figura 4.9.)



Es un número que no es positivo, es decir, que lleva un signo (-) acompañado de su número. -3

Figura 4.9. Respuesta del alumno 6 a la actividad 2

### Con dos descriptores

Analicemos ahora aquellas respuestas cuyo desglose se ha llevado a cabo mediante dos descriptores de simbolización y notación. Son combinaciones de aquellos descriptores definidos al principio de este punto.

*Actividad 1*

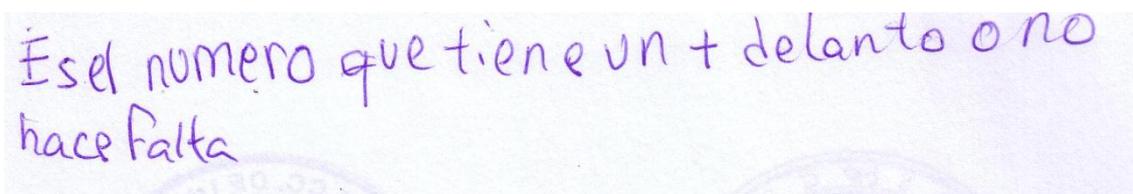
Tabla 4.10.

*Combinaciones de descriptores en la actividad 1*

Combinación de descriptores	Número de respuestas
+, sin signo	3
+, -	1

1. +, sin signo:

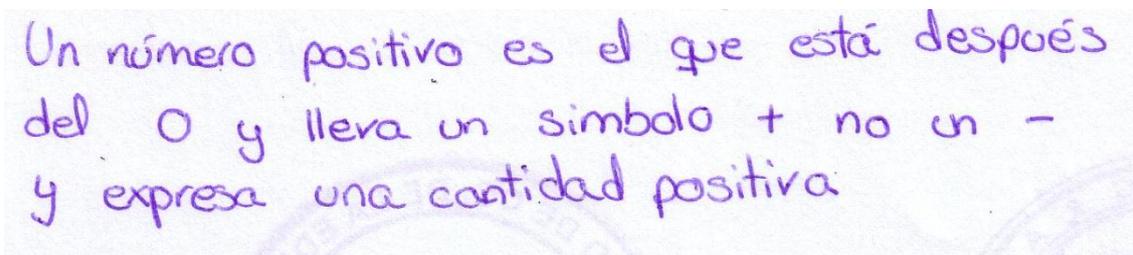
Estas tres respuestas tienen la misma información: los sujetos interpretan que en los números positivos el llevar signo más y no llevar ninguno es lo mismo. Aquí un ejemplo de ello (Figura 4.10.):



*Figura 4.10.* Respuesta del alumno 7 a la actividad 1

2. +, -:

En este caso no hay más que una respuesta, que se muestra a continuación (Figura 4.11.):



*Figura 4.11.* Respuesta del alumno 8 a la actividad 1

Como se puede leer, el alumno utiliza la expresión “lleva un símbolo +” seguida de “no un -” que lo que hace es reafirmar o aclarar lo que quiere transmitir.

### Actividad 2

En esta actividad solo aparece una respuesta en la que utilice dos descriptores de este bloque. Dicha respuesta es la del último sujeto descrito, este hizo los cambios pertinentes para que la respuesta anterior le fuera de utilidad en la actividad 2. Por lo que su respuesta fue la misma cambiando algunos términos (Figura 4.12).

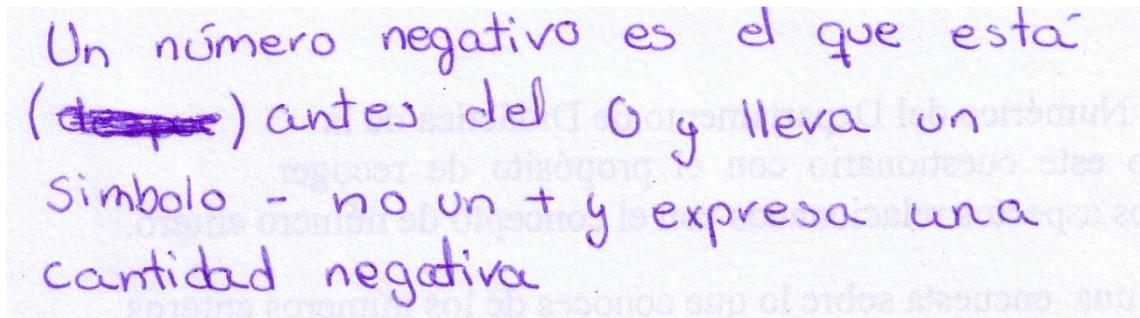


Figura 4.12. Respuesta del alumno 8 a la actividad 2

Como puede apreciarse los descriptores utilizados son +, -, y con estas expresiones lo que parece intentar hacer es reafirmarse en su definición.

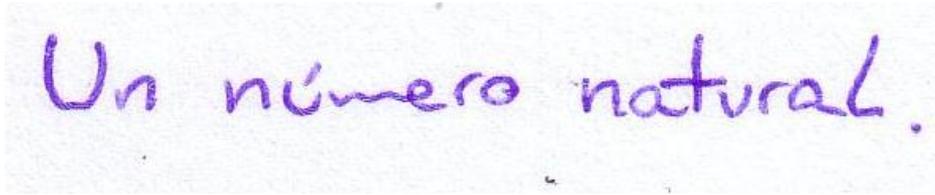
### 4.3.3. Términos clave

Por último, hemos construido la categoría de términos clave, en ella están aquellas respuestas que hemos clasificado con un sustantivo – número o cantidad- siempre acompañado de un calificativo que expresa la peculiaridad de ser positivo o negativo en cada caso. Los sustantivos junto con sus calificaciones constituyen el descriptor del término clave en cada caso.

Como hemos comentado anteriormente, algunos alumnos utilizan la misma estructura para las respuestas de las actividades 1 y 2. Debido a esto, los términos clave clasificados en la actividad de definición de los números positivos son los mismos que los catalogados para los negativos, con los correspondientes cambios para los términos duales. Por ello hemos decidido realizar un análisis conjunto de los términos clave de ambas actividades. Dicho esto, pasamos a describir cada uno de los términos clave.

- Las respuestas de este cuestionario dicen así:

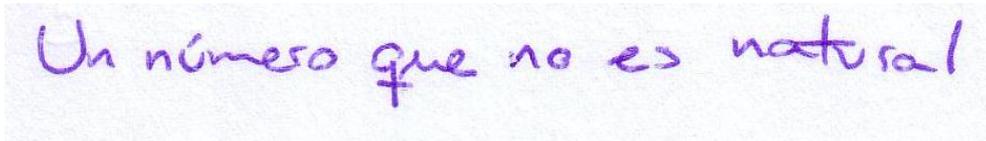
*Actividad 1*



Un número natural.

*Figura 4.13.* Respuesta del alumno 9 a la actividad 1

*Actividad 2*



Un número que no es natural

*Figura 4.14.* Respuesta del alumno 9 a la actividad 2

El sujeto parece responder atendiendo a los conceptos adquiridos en su formación académica, es decir, hace una reflexión más profunda, más abstracta, de lo que son los números enteros, ya que, hace la distinción entre positivos y negativos, como naturales y no naturales, respectivamente.

- Parte de la respuesta de 4 cuestionarios a la actividad 1 fue “no es negativo” o “no está en negativo”. Estos sujetos consideran los números positivos como aquellos que no son negativos, por lo tanto consideran estos conceptos como contrarios.

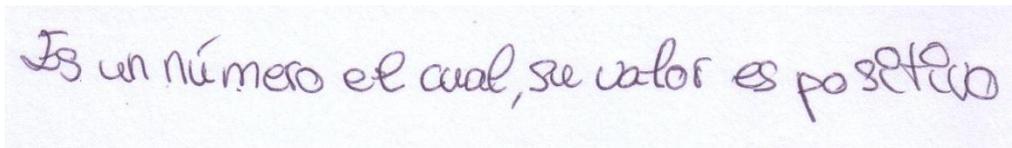
Análogamente, para la actividad 2, parte de la respuesta de 3 de los cuestionarios fue “no es positivo” o “no está en positivo”. Como en la pregunta 1, estos sujetos consideran los negativos contrarios a los positivos. Solo existe un caso en el que se utiliza explícitamente la palabra “contrario” para definir lo que él entiende por negativo, en parte de su respuesta escribe: “Un número negativo es lo contrario a uno positivo”.

- Como parte de una de las respuestas aparece la expresión “cantidad positiva” y “cantidad negativa” en las actividades 1 y 2, respectivamente. Considera al

número positivo y negativo como una cantidad, es decir, le da el sentido de medida en una magnitud, algo que se utiliza en la vida diaria. Le está dando sentido real, no abstracto.

- Las respuestas de otro de los cuestionarios a las actividades 1 y 2, comienzan con la expresión “es un número entero”, es decir, asigna el concepto número entero a los números positivos y negativos. Al igual que en el primer término clave descrito, este sujeto utiliza un concepto más abstracto e identifica los números positivos y negativos como partes de los números enteros. Utiliza lo aprendido en clase de matemáticas para definir lo que se le pide.
- En otro cuestionario, las respuestas a las actividades fueron:

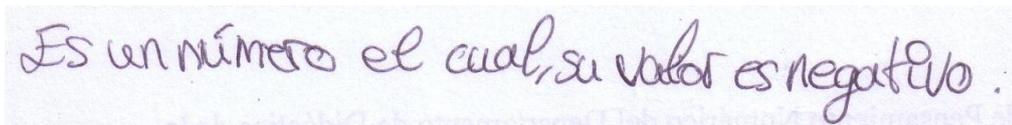
#### *Actividad 1*



Es un número el cual, su valor es positivo

*Figura 4.14.* Respuesta del alumno 10 a la actividad 1

#### *Actividad 2*



Es un número el cual, su valor es negativo.

*Figura 4.15.* Respuesta del alumno 10 a la actividad 2

El sujeto hace referencia al valor del número, es decir, al número le atribuyen una cualidad de valor. Pero la respuesta en general es una tautología, ya que no está diciendo nada, repite el mismo concepto expresado de distinta manera, sin dar una definición clara.

## 4.4. Análisis de las actividades 6 y 7

Los enunciados de dichas actividades son:

- Actividad 6: Describe una situación que se represente por  $-7$ .
- Actividad 7: Describe una situación que se represente por  $+3$ .

Estas actividades nos mostrarán como representan verbalmente los sujetos los números positivos y negativos mediante situaciones reales, de la vida diaria, y si tienen relación esas representaciones entre las dadas en el caso de negativos y las dadas en positivos.

Después de revisar un primer desglose de las respuestas mediante los descriptores detectados, hemos percibido que las actividades 6 y 7 se pueden clasificar por los mismos temas.

Por ello, hemos decidido hacer un análisis paralelo de las actividades 6 y 7. A continuación se presentan los distintos descriptores, con los cuales se mostrará el análisis hecho para la actividad 6, seguido del análisis para la actividad 7. Algunos de estos descriptores tienen alguna característica en común, por lo que los organizaremos en una misma categoría.

### 4.4.1. Verbos

Según el tipo de relación entre los elementos se pueden reconocer diferentes tipos de problemas aditivos. Vergnaud (1991) propone una clasificación de la que nosotros hemos escogido aquellos aspectos que resultan convenientes para el análisis de las respuestas de los alumnos.

En esta categoría hemos clasificado tanto aquellas respuestas que expresan el cambio de una cantidad mediante transformaciones simples, como aquellas otras en las que intervienen relación de comparación aditiva entre dos cantidades distintas.

#### Comparaciones simples

En este descriptor hemos incluido aquellas respuestas que utilizan verbos para describir una situación en la que se represente el número el negativo  $-7$  y positivo  $+3$ . Todas estas respuestas son cortas, una sola frase en la que aparece un verbo que cualifica al número.

Algunas de ellas, solo se componen de 3 palabras y otras nos complementan la frase con más detalle de la situación inventada.

Veamos el análisis de cada actividad:

#### *Actividad 6*

Como hemos dicho antes estas respuestas tienen en común la descripción de una situación real que represente a -7, en este caso. Los verbos utilizados en esta actividad aparecen en la tabla 4.11.:

Tabla 4.11.

#### *Verbos que son utilizados en la actividad 6*

Verbos	Número de respuestas
Deber	5
Faltar	1
Dar	1
Gastar	1
Tener una deuda	1

Pasamos ahora a ver la similitud de estos verbos, dando aquella definición que más se aproxime a la respuesta del alumno, según la DRAE.

- **Deber:** Adeudar, tener una deuda material con alguien.
- **Faltar:** Dicho de una persona: estar ausente del lugar en que suele estar.
- **Dar:** Donar, traspasar graciosamente a otra algo.
- **Gastar:** Emplear el dinero en algo.
- **Tener una deuda:** En este caso el tener por sí solo no tiene sentido. Definición similar a “deber”.

Todos los verbos utilizados tienen atribuidos una acepción en la que poseen una caracterización de pérdida o carencia. Por lo tanto identifican los números negativos como prescindir de o perder algo. Y con respecto al objeto perdido, 8 de las 9 respuestas, tomaron como complemento directo de la frase el dinero, es decir, caracterizaron a -7 con -7€. Ejemplo: “Le debes a tu tío siete euros”.

Pero dentro de esta pérdida-carencia hay diferentes puntos de vista según el verbo utilizado.

En los casos en los que se utilizan *deber* y *tener una deuda*, se expresa el estar endeudado, el tener que reintegrar ese dinero en algún momento.

Por el contrario, en la respuesta en las que se utiliza *gastar* se realiza un intercambio de mercancía por dinero. Por lo que, en esta respuesta se quiere expresar es que tiene menos dinero pero no lo tendrá que devolver.

En el caso del empleo del verbo *dar* no se debía, ni se intercambia por nada, sino que se ofrecen sin más, refleja un cambio de disminución. El sentido de perder que se da en esta respuesta sería distinto a los anteriores y puede identificarse con el que presta el dinero, es decir, la situación anterior a la de estar endeudado vista desde la perspectiva del prestamista.

Hay una única respuesta clasificada en este descriptor que no utiliza como complemento directo el dinero. Representada en la figura 4.16.

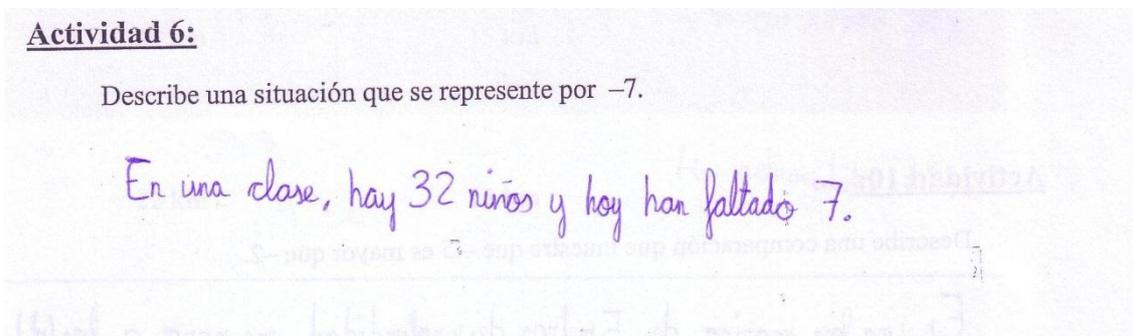


Figura 4.16. Respuesta del alumno 11 a la actividad 6

En este caso el complemento directo serían los niños. Y como se ha definido anteriormente aquí el verbo expresaría estar ausente del lugar en que suele encontrar, en este caso ese lugar sería la clase.

Observamos que el 89% de los alumnos que eligieron la descripción de la situación por medio de verbos con comparaciones simples, relacionan los números negativos con la pérdida de dinero.

*Actividad 7*

De la misma manera que la actividad anterior, en las respuestas clasificadas en este descriptor aparecen diferentes verbos que expresan una situación real que representa a 3. Los verbos utilizados en este caso están recogidos en la tabla 4.12:

Tabla 4.12.

*Verbos que son utilizados en la actividad 7*

Verbos	Número de respuestas
Tener	3
Encontrar	2
Ganar	2
Cumplir	1
Comprar	1
Ingresar	1
Regalar	1

Pasamos ahora a ver la similitud de estos verbos, dando aquella definición que más se aproxime a la respuesta del alumno, según la DRAE.

- **Tener:** Poseer, tener en su poder algo.
- **Encontrar:** Dar con alguien o algo sin buscarlo.
- **Ganar:** Obtener lo que se disputa en un juego, batalla oposición, pleito, etc.
- **Cumplir:** Llegar a tener la edad que se indica o numero cabal de años o meses.
- **Comprar:** Obtener algo con dinero.
- **Ingresar:** Ganar cierta cantidad de dinero regularmente por algún concepto.
- **Regalar:** Dar a alguien, sin recibir nada a cambio.

Como podemos observar todos estos verbos expresan una caracterización de adición. Por lo que podemos plantear como hipótesis que los alumnos interpretan los números positivos como un cambio, resultado de algo que se suma, algo que se añade a lo que previamente ya se tenía.

Todas las oraciones tienen en común su estructura sintáctica: verbo (con determinada conjugación) y complemento directo.

Con respecto al tema escogido por los sujetos para expresar la situación, presentamos la tabla 4.13.

Tabla 4.13.

*Temáticas utilizadas en la actividad 7*

Tipo de situaciones	Porcentaje
Dinero	64%
Edad	18%
Pelotas	9%
Naranjas	9%

**Comparaciones aditivas**

Para representar una situación donde se ponga de manifiesto los números enteros  $-7$  y  $+3$ , estos alumnos optan por redactar una situación real donde utilizan diferentes cifras que combinándolas con alguna operación obtienen como resultado dichos números.

*Actividad 6*

Todos los textos redactados en esta actividad tiene como factor común el dinero. Son situaciones que relatan la compra de algún producto o el préstamo de dinero.

Se utilizan números en positivo, pero en la redacción incluyen verbos que afectan a esos cantidades y las convierten en negativos. En todos los problemas la operación que se realiza es la de sustracción.

Los verbos empleados en estas respuestas son:

- Tomar prestado
- Costar
- Comprar
- Pagar
- Deber

Hay un caso donde se tienen las mismas características descritas pero su formulación no es correcta. Es decir, no emplea las cifras correctas para que la solución sea -7.

#### *Actividad 7*

Al contrario que en la actividad anterior, las respuestas clasificadas en este descriptor para un número positivo son más diversas. Por un lado estos problemas incluyen para su resolución tanto sumas como restas. Es decir para obtener +3, algunos realizan una suma y otros una resta.

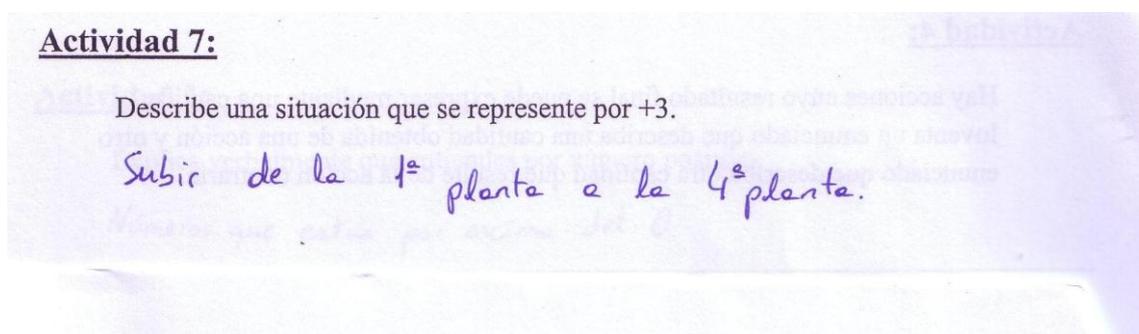
Los verbos utilizados están recogidos en la tabla 4.14.:

Tabla 4.14.

#### *Verbos que son utilizados en la actividad 7*

Verbos utilizados para la suma	Verbos utilizados para la resta
Regalar	Anular
Encontrar	Deber
Dar	Subir

Es curioso haber clasificado el verbo subir para una resta. Pero la redacción de esta respuesta así lo pedía. La respuesta textual fue (Figura 4.17.):



*Figura 4.17.* Respuesta del alumno 12 a la actividad 7

El alumno contabiliza los pisos que ha subido, en otras palabras realiza la operación  $4-1=3$  y así representa +3.

Por otro lado, las temáticas que se utilizan para las operaciones son dispares, las presentamos en la tabla 4.15.

Tabla 4.15.

*Temáticas utilizadas en la actividad 7*

Elementos utilizado	Número de respuestas
Dinero	2
Bolígrafos	1
Goles	1
Caramelos	1
Plantas de edificio	1

#### **4.4.2. Punto de referencia**

Otra de las categorías que hemos construido ha sido aquella que se apoya en algún punto, objeto o lugar para desarrollar su idea. Dentro de esta categoría hemos diferenciado entre dos tipos de respuestas por la situación expuesta. Por ello se organizan en dos descriptores diferentes.

##### **Longitud respecto de un nivel**

Las respuestas clasificadas en este descriptor siguen una misma estructura: describen la situación que se pide con cantidades de la magnitud longitud entendidas en posición vertical. Todas ellas lo hacen de manera escrita, excepto una respuesta que, además, añade un dibujo para apoyar su descripción escrita.

##### *Actividad 6*

Las expresiones encontradas en las respuestas que pertenecen a este descriptor están relacionadas a dos tipos de situaciones. En la tabla 4.16. aparece la distinción que hemos llevado a cabo en esta actividad.

Tabla 4.16.

*Situaciones encontradas en la actividad 6*

Expresiones relacionadas con	Número de respuestas
Plantas de edificio	6
Metros bajo el nivel del mar	2

La primera de ellas viene dada por cantidades discretas y por el contrario los metros bajo el nivel del mar miden una cantidad continua.

*Plantas de edificio*

Dentro de las 6 respuestas que utilizan como situación las plantas de un edificio, hay elementos de las frases que son comunes en todas pero también existen pequeñas diferencias respecto a los términos utilizados para relatar la situación.

Todas las respuestas contienen la palabra “planta”, lo que nos lleva a afirmar que todos estos alumnos identifican el número negativo con los pisos de un edificio. Utilizan palabras que hacen saber que el lugar está por debajo del suelo, como “parking” o “sótano”,

Tres de las respuestas son grupos nominales que contienen complementos del nombre. Analizamos sintácticamente en la tabla 4.17.:

Tabla 4.17.

*Análisis sintáctico de las respuestas*

Grupo adjetival	Núcleo del sujeto	Grupo preposicional
	El número de planta	De un centro comercial
La séptima	Planta	De un parking
-7	La planta	En un parking

Por otro lado, dos respuestas utilizan una oración (con sujeto omitido y predicado). A continuación se muestra el análisis sintáctico de las respuestas (Tabla 4.18.).

Tabla 4.18.

*Análisis sintáctico de las respuestas*

Sujeto		Predicado		
Omitido	Verbo	C.D.	C.C. Modo	C.C. Lugar
Yo	Tengo	El coche	Aparcado	En la planta -7
Yo	Voy a aparcar (perífrasis verbal)	El coche		En la planta -7 de ese parking

La última de las respuestas (Figura 4.18.) que identifica una situación de números negativos con las plantas de un edificio lo expresa con un grupo nominal acompañado de un dibujo. Esta es la única respuesta con la que ocurre esto, en ella queda reflejado que la representación del número negativo se identifica con pisos subterráneos, quedando así una correspondencia con la recta real donde el cero sería el suelo.

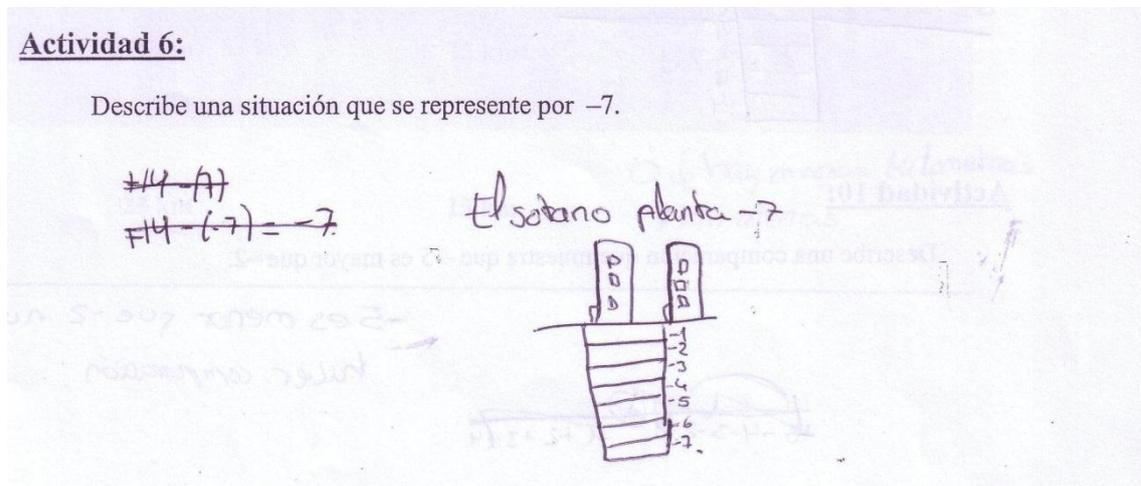


Figura 4.18. Respuesta del alumno 13 a la actividad 6

*Metros bajo nivel del mar*

Dos de las respuestas clasificadas en este descriptor identifican los metros bajo el nivel del mar con una situación que representa al número negativo  $-7$ . Ambas respuestas utilizan una oración para describir dicha situación. (Figuras 4.19 y 4.20)

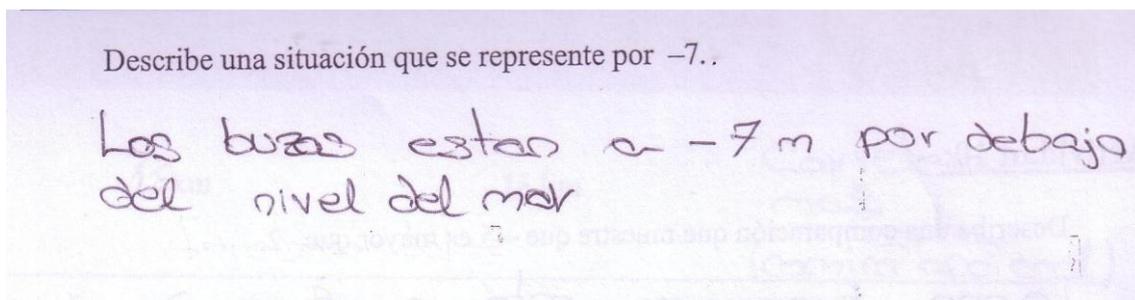


Figura 4.19. Respuesta del alumno 14 a la actividad 6

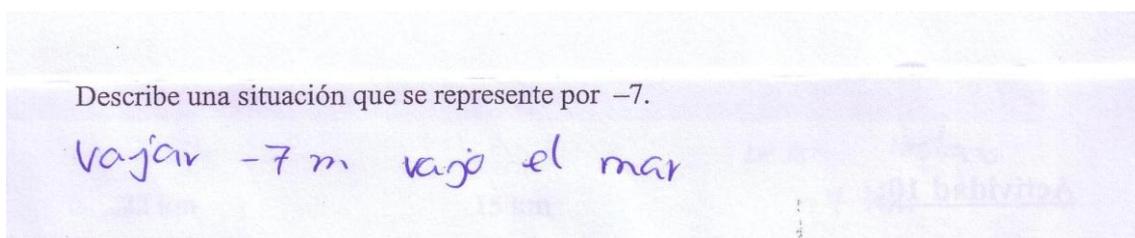


Figura 4.20. Respuesta del alumno 2 a la actividad 6

Queda reflejado que toman como punto de referencia el nivel del mar y relacionan la longitud que hay por debajo de este con los números negativos. Por lo que vuelven a dar una correspondencia de este tipo de situación con la recta de números reales.

#### Actividad 7

Las siete respuestas contabilizadas en esta actividad con representación vertical utilizan la situación de plantas de un edificio para identificar el número +3.

En todas ellas aparece la palabra “planta”, por lo que afirmamos que los alumnos identifican los números positivos con las plantas de un edificio.

De las 7 respuestas 4 son grupos nominales y las tres respuestas restantes son oraciones.

Dentro de estas oraciones, dos de ellas coinciden en describir el procedimiento para llegar a la planta número 3 de un edificio: utilizar el ascensor. Por lo que, además de relacionar el número con las plantas del edificio lo hace con el botón del ascensor, es decir, con el símbolo que representa 3. (Figuras 4.21. y 4.22.)

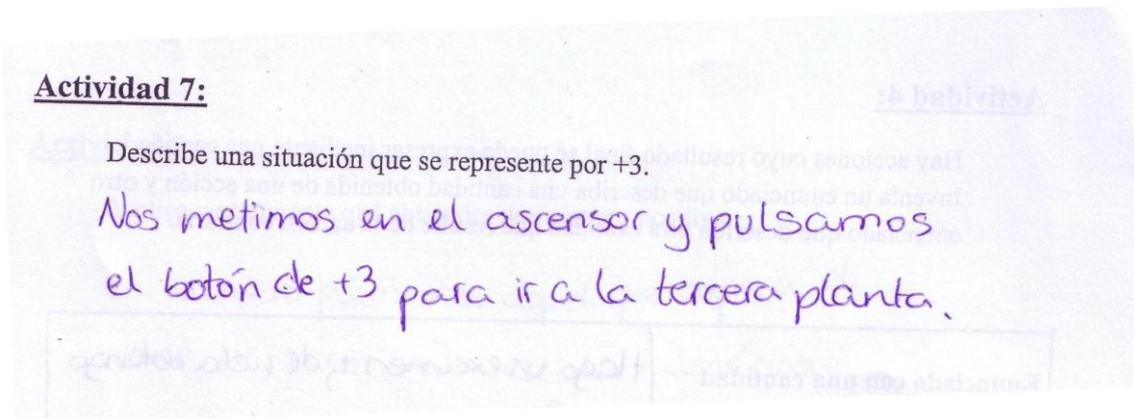


Figura 4.21. Respuesta del alumno 15 a la actividad 7

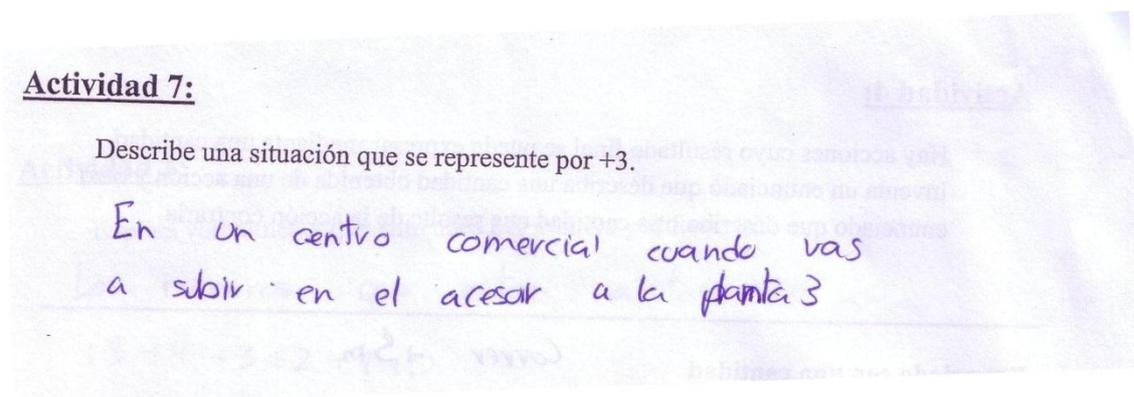


Figura 4.22. Respuesta del alumno 2 a la actividad 7

### **Temperatura**

Las respuestas clasificadas en este descriptor son aquellas que relacionan una situación que represente a los números enteros con la temperatura en grados centígrados.

#### *Actividad 6*

Seis son las respuestas a esta actividad que emplean la situación de la temperatura. Algunas de las oraciones son escuetas y solo constan de tres palabras. Por otro lado, las demás respuestas tienen más extensión, y argumentan algo más la situación. Todas ellas son expresiones coloquiales.

Solo una de las respuestas asocia la temperatura con el termómetro (Figura 4.23.).

**Actividad 6:**

Describe una situación que se represente por  $-7$ .

cuando un termómetro está a  $-7$  grados bajo cero

Figura 4.23. Respuesta del alumno 16 a la actividad 6

Además este alumno incurre en una redundancia escribiendo  $-7$  y bajo cero.

*Actividad 7*

Solo un sujeto optó por describir la situación a través de la temperatura. Observamos que es una oración coloquial. (Figura 4.24.)

**Actividad 7:**

Describe una situación que se represente por  $+3$ .

Hace  $+30^{\circ}$  de temperatura en la calle

Figura 4.24. Respuesta del alumno 17 a la actividad 7

### 4.4.3. Interpretación operacional

En esta categoría hemos clasificado aquellas respuestas que hicieron una interpretación diferente a lo que se pedía. Estos alumnos interpretaron el enunciado como describir una situación en la que esté representado  $-7$  y  $+3$  en cada caso, en lugar de una situación que se represente con estos números.

Estos alumnos escribieron operaciones en los que intervenían estos números pero nunca aparecen como resultado de la misma.

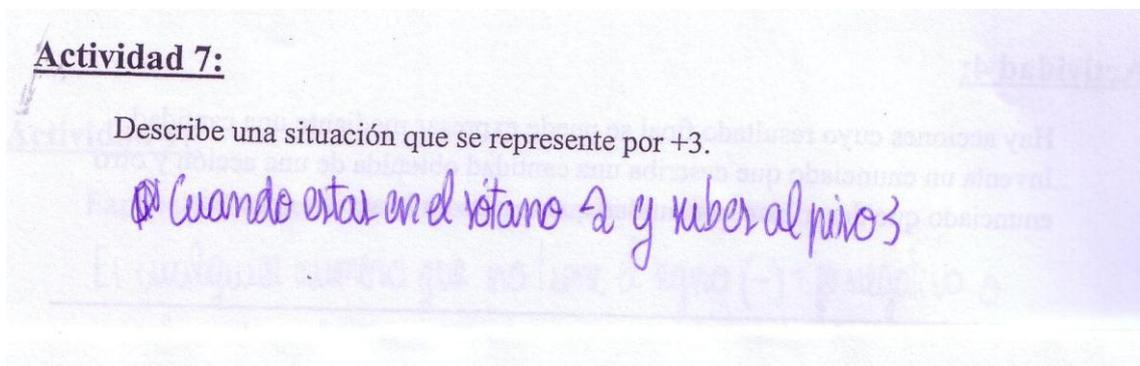
*Actividad 6*

Tres son las respuestas clasificadas en este descriptor, vienen dadas por una operación simbólica en donde aparece el  $-7$ . Observamos que solo una de las respuestas hace actuar a  $-7$  como factor de un producto y en las restantes se presenta como sumando.

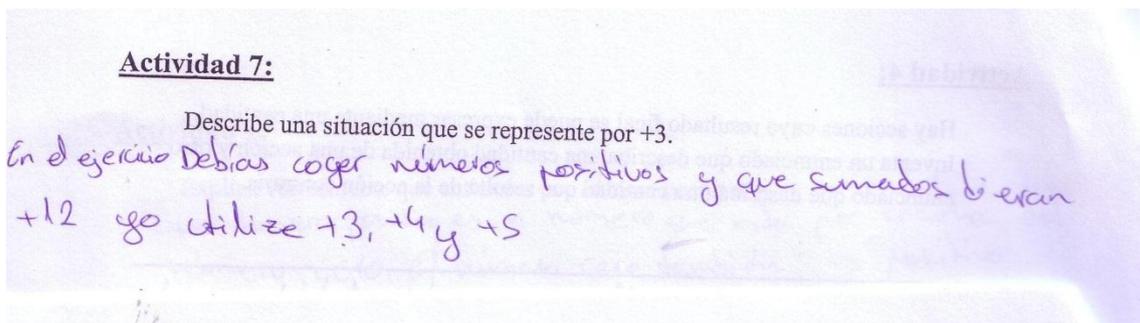
*Actividad 7*

En este descriptor nos encontramos con 6 respuestas, de las cuales 4 utilizan lenguaje simbólico para describir la situación. Lo hacen de la misma manera que en la actividad anterior, siendo el número +3 parte de la operación pero nunca el resultado. Esta cifra aparece en 3 de las respuestas como sumando y en la restante como factor de un producto.

Por otro lado, aparecen otro tipo de respuestas que hemos clasificado en este descriptor, estas tienen la característica de que son operaciones pero redactadas en un enunciado. Estos enunciados incluyen el positivo 3 y lo implican en alguna acción. (Figuras 4.25. y 4.26.)



*Figura 4.25. Respuesta del alumno 16 a la actividad 7*



*Figura 4.26. Respuesta del alumno 18 a la actividad 7*

En estas respuestas se describen una operación que cumple las características de las anteriores. Por ejemplo, en el primer caso la operación que realiza sería  $3 - (-2) = 5$  o en el siguiente su operación sería  $5 + 4 + 3 = 12$ .

## 4.5. Análisis de la actividad 5

El enunciado de esta actividad dice así:

- Actividad 5: Representa el número negativo  $-5$ , al menos de tres formas diferentes.

En esta actividad lo que se pretendía es que los alumnos dieran diferentes representaciones gráficas del número entero  $-5$ , para realizar un análisis de la relación Referencia – Signo en el triángulo de Frege. En lugar de eso la mayoría de los sujetos describieron una situación en la que se involucra al número  $-5$ , es decir, la relación que se da es la de Referencia – Sentido. Aun así, hemos decidido analizar las respuestas a esta actividad y así complementar con nuevos sentidos que puedan aparecer con los ya descritos en actividades 6 y 7.

Hay que tener en cuenta para próximas investigaciones precisar la redacción de la pregunta si lo que se quiere es obtener interpretaciones de la relación Referencia-Signo.

La clasificación de las respuestas se realizó de la misma manera que las anteriores, desglosando las respuestas atendiendo a una serie de descriptores. En algunas de las respuestas se clasifican en un mismo descriptor más de una representación de las tres que se pedían, por lo que tampoco se obtuvo tanta variedad de respuestas como se esperaba.

Después de revisar un primer desglose de las respuestas mediante los descriptores detectados, hemos percibido que aparecen de nuevo algunos que ya fueron descritos en las actividades 6 y 7 y otros que se pueden añadir a los ya existentes. Describimos cada una de ellos.

### 4.5.1. Punto de referencia

Esta categoría apareció ya en el análisis de actividades anteriores, por lo que solo comentaremos las variantes que aparecen en esta pregunta.

Como en el caso anterior hemos clasificado las respuestas en dos tipos diferentes: longitud respecto de un nivel y temperatura.

### **Longitud respecto de un nivel**

Las respuestas clasificadas en este descriptor siguen una misma estructura: describen la representación de -5 con una situación en vertical.

Los tipos de respuestas que hemos clasificados están recogido en la tabla 4.19.:

Tabla 4.19.

#### *Situaciones encontradas en la actividad 5*

Expresiones relacionadas con	Número de respuestas
Plantas de edificio	11
Metros respecto algo	3

En la situación de plantas de edificios se utilizan palabras como “planta” o “ascensor”. También se recurre al verbo “bajar” para darle el sentido negativo a la cifra 5.

Por otro lado, cuando los alumnos utilizan expresiones para referirse a metros respecto a algo, emplean diferentes locuciones en las tres respuestas contabilizadas: “por debajo del nivel del mar”, “por debajo del suelo” y “metros de profundidad”. Estas dos últimas no aparecían en el análisis de las actividades 6 y 7.

### **Temperatura**

Las respuestas clasificadas en este descriptor son aquellas que relacionan una situación que represente a los números enteros con la temperatura en grados centígrados.

En este caso también aparecen:

- En frase coloquial respecto al clima



*Figura 4.27. Respuesta del alumno 19 a la actividad 5*

- Con la simbología de grados y haciendo referencia al termómetro



Figura 4.28. Respuesta del alumno 20 a la actividad 5

- Una representación gráfica del termómetro

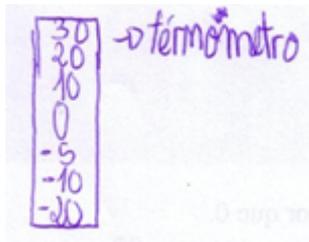


Figura 4.29. Respuesta del alumno 16 a la actividad 5

La representación gráfica no está recogida en la actividad anterior, además esta sería una de las relaciones entre Referencia-Signo.

#### 4.5.2. Verbos

En esta categoría hemos incluido aquellas respuestas que utilizan verbos para describir una situación en la que se represente el número entero -5. Una sola frase en la que aparece un verbo que cualifica al número.

Los verbos utilizados están recogidos en la tabla 4.20.:

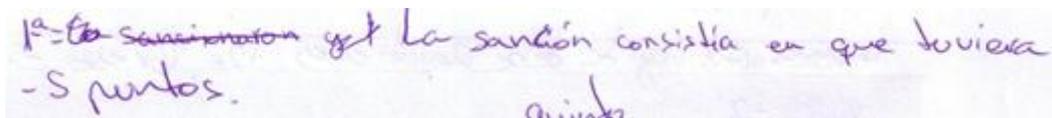
Tabla 4.20.

*Verbos que son utilizados en la actividad 5*

Verbos	Número de respuestas
Deber	5
Gastar	1
Beber	1
Rebajar	1
Retrasarse	1
Descontar	1

Como vemos todos los verbos empleados expresan un cambio que tiene una connotación de pérdida o disminución, por lo que atribuyen el numero 5 el sentido de negativo.

Una de las respuestas clasificadas aquí dice así (Figura 4.30.):

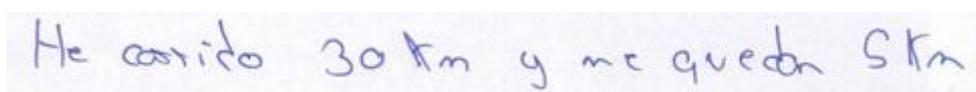


1ª - La sanción consistía en que tuviera -5 puntos.

*Figura 4.30.* Respuesta del alumno 18 a la actividad -5

En este caso lo que da el sentido negativo a la oración, además del -5, no es el verbo sino un sustantivo: sanción, que ya de por sí tiene una connotación de pérdida.

Otra de las formas a las que contestan a esta actividad y es común en 4 alumnos es la de atribuir a -5 el sentido de “distancia que queda por recorrer”. Este tipo de respuesta no estaba recogida en las actividades anteriores y pone de manifiesto que estos alumnos relacionan los números negativos con distancia no recorrida, es decir, interpretan la situación como una operación de resta. Es un enunciado de *igualación*, más elaborado que los anteriores ya que integra un cambio junto con una comparación



He corrido 30 km y me quedan 5 km

*Figura 4.31.* Respuesta del alumno 21 a la actividad 5

### 4.5.3. Representaciones gráficas

Esta categoría si pertenece a las relaciones Referencia-Signo. Por lo que los alumnos que contestaron de este modo interpretaron bien la actividad, al menos como nosotros queríamos. Este tipo de respuestas no están recogidas en actividades anteriores.

#### Simbolismo

Las respuestas clasificadas aquí utilizan símbolos para representar el número negativo, ya sea de la forma más sencilla o a través de operaciones o comparaciones. A continuación presentamos los distintos tipos de respuesta que hemos encontrado en la tabla 4.21.

Tabla 4.21.

*Tipos de respuestas de la actividad 5*

Respuesta	Número de respuestas
-5	7
(-5)	6
-5/1	3
<, >	1
5	1

Muchos de los alumnos interpretan que -5, (-5) y -5/1 son dos maneras diferentes de representar -5. Uno de ellos escribe una desigualdad correcta en la que compara el -5 con otro número.

Por último, uno de los sujetos utiliza el valor absoluto como representación de -5. Conjeturamos que el alumno no tiene bien asimilado el concepto de valor absoluto y este recuerda que el -5 tiene algo que ver con |5|, por ello entiende que esta es una representación adecuada de lo que se pide.

Otra manera simbólica de responder a esta actividad que nos hemos encontrado ha sido la utilización de operaciones cuyo resultado es -5. Todos los sujetos que utilizaron esta manera de representar escribieron tres operaciones distintas con resultado

-5. Interpretaron que cada operación era una forma diferente de representación de -5. (Figura 4.32.)

**Actividad 5:**

Representa el número negativo  $-5$ , al menos de tres formas diferentes.

$$\begin{aligned} -2 - 3 &= -5 \\ -10 + 5 &= -5 \\ -80 + 45 &= -35 \end{aligned}$$

Figura 4.32. Respuesta del alumno 4 a la actividad 5

**Recta real**

En este apartado de la representación del número -5, los alumnos escogen la recta real. Cinco de ellos lo hacen en posición horizontal y uno en posición vertical. Resulta extraño que solo cinco sujetos representen -5 como punto de la recta real, cuando en el sistema académico esta tan presente.

A modo de reflexión por la utilización de la recta real podemos decir que, ésta hace que se identifiquen los números enteros con los puntos de dicha recta. Entonces y, una vez ubicados, relacionan unos números con otros respecto a su posición relativa a un punto de referencia que, en este caso, es el cero. Cuando se usa el modelo de la recta real los números son, al mismo tiempo, posiciones sobre la recta y desplazamientos sobre ella. La recta integra el conocimiento previo de los estudiantes y facilita el aprendizaje de las posteriores extensiones numéricas.

Además en la recta real se agrupa todo (o casi todo) lo analizado hasta el momento: hay una relación de posición y orden, se utiliza el simbolismo para ubicar los números, y sirve como referencia para interpretar situaciones, tanto horizontales como verticales.



# **CAPÍTULO 5**

## **CONCLUSIONES FINALES**

En este apartado se recogen las conclusiones obtenidas a partir de los resultados de los análisis anteriormente realizados, se ponen de manifiesto las limitaciones de la investigación y se proponen orientaciones para la continuidad del estudio.

El estudio se inició con el objeto de describir y sistematizar los significados referentes al concepto de número entero puestos de manifiesto por un grupo estándar de estudiantes de segundo curso de educación secundaria obligatoria en diferentes sistemas de representación, verbal y simbólico en nuestro caso.

Para llevar a cabo este propósito inicial diseñamos un cuestionario que permitiera recoger mediante registros verbales, gráficos y simbólicos, distintas expresiones e interpretaciones de los estudiantes del curso 2º de E.S.O. respecto a las diferentes componentes de significado para el concepto de número entero. Una vez diseñado, redactado y controlada la validez del instrumento por los investigadores implicados en este estudio, se pasó a aplicarlo en un aula cuyos sujetos se ajustaban a las características deseadas.

El propósito central de esta investigación fue la identificación y caracterización de los diferentes usos, descripciones y términos clave con los que los escolares de secundaria expresan sus interpretaciones sobre el concepto de número entero.

En general, la información recogida mediante el proceso descrito responde a las expectativas teóricas planteadas. A través de una serie de preguntas sencillas, hemos realizado un acercamiento a aquellos significados parciales que contemplan los alumnos de 2º de E.S.O. sobre algunos conocimientos que sustentan el concepto de número

entero. El estudio nos revela diferentes sentidos, signos y referencias que tienen los alumnos de este nivel con respecto a este concepto, que caracterizan sus concepciones.

## 5.1. Conclusiones del análisis de las actividades 1 y 2

El análisis de estas actividades muestra como de una sencilla pregunta se puede obtener información significativa y relevante.

Nuestro propósito era conocer e interpretar qué entendían los alumnos encuestados por número positivo y por número negativo, qué significados propios atribuyen a estos conceptos. El análisis de sus respuestas nos hemos propuesto hacerlo por medio del triángulo semántico de Frege, cuyas componentes son: Signo—Sentido—Referencia (Rico, 2013). Presentamos a continuación los resultados de ese análisis.

Hemos encontrado una serie de características comunes en las respuestas, que se corresponden con cada uno de los vértices del triángulo semántico, como pasamos a exponer.

**Sentido:** La práctica totalidad de repuestas describen que un número es entero (positivo o negativo) porque mantiene una o varias relaciones respecto a cero.

- Estas relaciones incluyen fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que sirven para dar sentido al concepto de número entero.
- Las descripciones empleadas para estas respuestas, generalmente, denotan posición relativa (arriba-abajo, derecha-izquierda) o comparación (mayor que-menor que, superior-inferior).
- Las descripciones de posición utilizan una determinada estructura sintáctica: la relación preposicional. Las relaciones de posición o de orden para describir el concepto de número positivo y/o negativo, son siempre respecto a un mismo término: cero.

**Signo:** Simbología y notación; se observan diferentes maneras con las que se puede representar el concepto así como sus relaciones con otros conceptos. En nuestro caso, la representación mediante símbolos y notación de los números positivos y/o negativos, es la que sigue.

- Para definir el número positivo se emplean 3 formas diferentes: lleva +, no lleva -, no lleva signo.
- Para definir el número negativo se emplea 2 formas diferentes: lleva -, no lleva +.

- Cuando usan el signo – (no lleva – o lleva –, depende del caso) para la definición del concepto, ya sea el número positivo o el número negativo, hemos obtenido una estructura común pero en la que emplean diferentes términos que son sinónimos y en conjunto expresan una misma idea.

**Referencia:** Se muestra mediante el empleo de determinados términos clave que incluyen las relaciones del concepto con otros conceptos, atendiendo tanto a la estructura matemática de la que el concepto forma parte, como a la estructura matemática que dicho concepto configura. Es decir, en nuestro caso, los estudiantes utilizan conceptos que tienen definición propia para precisar los conceptos pedidos, a saber, números positivos y/o negativos.

### 5.1.1. Análisis en porcentajes

A continuación presentamos la frecuencia de las respuestas en porcentajes en la tabla 5.1. Lo haremos de forma general, es decir contabilizaremos todas las respuestas que emplearon la categoría en cuestión. Muchas de las respuestas utilizan más de una, por lo que la suma de los porcentajes no dará como resultado el 100%.

Tabla 5.1.

*Porcentaje de respuestas de las actividades 1 y 2*

Categorías	Porcentaje	
	Positivo	Negativo
Relaciones respecto de 0	58%	61%
Simbología	39%	39%
Términos clave	32%	29%

Encontramos que las explicaciones verbales de los alumnos sobre lo que entienden por número entero, se ajustan a las siguientes variables.

- Las tres quintas partes de los alumnos que participaron en la investigación describieron el sentido de los enteros expresando una relación respecto a cero.
- Las dos quintas partes, prácticamente, del total de respuestas utilizaron símbolos para describir tanto los números positivos como los negativos.
- Finalmente, un tercio de los estudiantes utilizaron una estructura matemática como término clave y referencia para describir el concepto de número entero.

Dentro de estas categorías hemos diferenciado diferentes tipos de respuesta que vamos a desglosar en las siguientes tablas. Los porcentajes que aparecen son los correspondientes al total de alumnos que eligieron esa opción para responder a cada actividad.

**Tabla referente a sentido**

Tabla 5.2.

*Tipos de respuestas obtenidas dentro de la categoría de sentido*

	Positivo	Negativo
Relación posicional	94%	89%
Relación de comparación	22%	25%
Combinación de ambas	11%	5%

Como en la tabla anterior, muchas de las respuestas utilizan más de un tipo, por lo que la suma total de los porcentajes no da como resultado el 100%.

- La relación posicional es utilizada por casi la totalidad de los alumnos que eligieron la relación con respecto a cero para contestar a las actividades 1 y 2.

**Tablas referentes a signo**

Tabla 5.3.

*Tipos de respuestas obtenidas dentro de la categoría de signo en la actividad 1.*

	Sin -	Con +	Sin signo
Solo un descriptor	50%	8%	8%
Combinación de dos descriptores		8%	25%

Tabla 5.4.

*Tipos de respuestas obtenidas dentro de la categoría de signo en la actividad 2.*

	Con -	Sin +
Solo un descriptor	92%	0%
Combinación de dos descriptores		8%

- Como se puede observar los alumnos utilizan formas diferentes para definir el número positivo y número negativo y las usan combinándolas entre ellas o utilizando solo una de ellas.
- La utilización del concepto menos es muy usado por los estudiantes tanto para definir los negativos como para definir los positivos.

**Tablas referentes a términos clave**

Tabla 5.5.

*Tipos de respuestas obtenidas dentro de la categoría referencia en la actividad 1*

Términos clave	Número natural	No es negativo	Cantidad positiva	Número entero	Valor positivo
Porcentaje	10%	60%	10%	10%	10%

Tabla 5.6.

*Tipos de respuestas obtenidas dentro de la categoría referencia en la actividad 2*

Términos clave	Número no natural	No es positivo	Cantidad negativa	Número entero	Valor negativo
Porcentaje	11%	45%	11%	11%	22%

- Los alumnos que usan términos clave en la actividad 1, emplean el término contrario en la actividad 2, de ahí que los porcentajes de términos clave utilizados en las dos actividades sean tan similares.

- El término clave más utilizado es el que corresponde a la negación del contrario, esto quiere decir, que los alumnos realizan una dicotomía en relación a los números, “si no es negativo, tiene que ser positivo” y viceversa.

### **Tabla referente a las combinaciones de las categorías en las respuestas**

Como se ha comentado anteriormente, alguna de las respuestas emplean combinaciones de distintas categorías. Por ello clasificamos las respuestas por combinaciones de estos tres apartados. (Tabla 5.7.)

Tabla 5.7.

#### *Combinaciones de las distintas categorías*

Combinaciones	Porcentajes	
	Positivo	Negativo
Relaciones respecto de 0, simbología y términos clave	6%	3%
Relaciones con respecto a 0 y simbología	3%	10%
Relaciones con respecto a 0 y términos clave	13%	16%

Interpretamos que los alumnos que respondieron con una de estas formas aportaron un significado más completo y no se limitaron solo a una de las componentes del significado sino que establecieron relaciones entre ellas y obtuvieron una definición más completa. Esto se puede expresar diciendo que algunos alumnos describen este concepto mediante una relación entre diferentes vértices del triángulo semántico: Signo—Sentido—Referencia.

## **5.2. Conclusiones del análisis de las actividades 6 y 7**

En estas actividades hemos querido obtener los diferentes sentidos que daban los alumnos a los números enteros. Es decir, realizar un análisis de la relación entre Referencia-Sentido del triángulo semántico cuando es expresada por los alumnos.

En la actividad planteada propusimos describir situaciones para el concepto de número negativo y el de número positivo a través de dos números concretos:  $-7$  y  $+3$ , así los alumnos mostraron diferentes situaciones donde se podían ejemplificar esos conceptos.

**Verbos y magnitudes:** Los alumnos vinculan el sentido del número con una acción, interpretan los números positivos y negativos como una cantidad que es consecuencia de un acto. El tema central de estas respuestas es la magnitud escogida para ejemplificar el número; sobre una cantidad de esa magnitud ocurren acciones expresadas por uno o más verbos.

- El tema al que recurren la mayoría de los alumnos al hablar sobre números enteros es el dinero, esto coincide con los resultados obtenidos en el estudio sobre “las situaciones reales de los problemas aritméticos” (Cobo, 1985).
- En el caso de los números negativos los alumnos coinciden frecuentemente en la utilización de los mismos términos para redactar la situación, como en el verbo “deber”, y en contextualizar la situación con la temática del dinero.
- Utilizan números positivos junto con verbos que le dan un sentido negativo.

**Punto de referencia:** Para representar una situación algunos alumnos escogen un sistema que tiene un punto de referencia. En este caso hemos encontrado diferentes sistemas.

- La mayoría de los alumnos usan la situación de plantas de edificios tanto con números negativos como positivos. El punto de referencia es el nivel de la planta baja.
- Las oraciones utilizadas son de uso coloquial, son frases cotidianas.
- Todos los tipos de respuestas descritas en este punto tienen en común que expresan la situación tomando algún punto de referencia. En algunos de los casos no mencionan explícitamente ese punto pero lo hacen implícitamente, porque para la utilización de su expresión se basan en éste.

**Interpretación operatoria:** El 15% de los alumnos contestaron a estas actividades implicando al número pedido en una operación. Estos alumnos interpretaron el enunciado como una petición para describir una situación en la que esté representado -7 y +3 en cada caso, en lugar de una situación que represente a estos números. O bien puede que entiendan que una situación en la que se represente algo es aquella en la que aparezca ese algo sin más, sin tener en cuenta que función tiene en ese contexto.

### 5.2.1. Análisis en porcentajes

A continuación presentamos la frecuencia de las respuestas en porcentajes, los correspondientes a número positivo y a número negativo (Tabla 5.8.).

Tabla 5.8.

*Porcentajes de respuestas de las actividades 6 y 7*

Categorías	Porcentajes	
	Negativo	Positivo
Comparaciones	45%	55%
Puntos de referencia	45%	26%
Interpretación operatoria	10%	19%

Como observamos en este caso hay una diferencia apreciable entre la interpretación del número positivo y del número negativo que hacen los alumnos.

- Existe el mismo porcentaje de respuestas que utilizan las situaciones de comparaciones y las situaciones de puntos de referencia para los números negativos.
- Para los positivos, los alumnos se decantan por utilizar el número dado en una oración.

Dentro de cada categoría hay diferentes tipos que también hemos contabilizado. Hemos calculado sus porcentajes que quedan recogidos en la tabla 5.9. y 5.10.

Tabla 5.9.

*Tipos de comparaciones*

Comparaciones	Negativo	Positivo
Simples	64%	65%
Aditivas	36%	35%

Como ya definimos en el punto 4.4.1., las comparaciones simples son aquellas que están construidas por una sola frase en la que aparece un verbo que cualifica al número solicitado en cada caso. Por otro lado, en las comparaciones aditivas, los alumnos optan por redactar una situación real donde utilizan diferentes cifras que combinándolas con alguna operación obtienen como resultado los números requeridos en cada actividad.

Se observa que el reparto de respuestas entre comparaciones simples y aditivas es muy similar en ambos casos. Esto puede deberse a que el mismo alumno responda de igual forma a una actividad que a otra, haciendo los cambios correspondientes.

Tabla 5.10.

*Tipos de situaciones*

Punto de referencia	Negativo	Positivo
Planta de edificio	43%	88%
Nivel bajo el mar	14%	0%
Temperatura	43%	12%

Como se puede observar, cuando se trata de números positivos la inmensa mayoría se decanta por la situación de las plantas de edificio y como es natural el nivel del mar no es conveniente para ese caso. Sin embargo, las respuestas en la actividad referente a los negativos tienen igual porcentaje para plantas de edificio o para temperaturas.

### 5.3. Conclusiones del análisis de la actividad 5

En esta actividad queríamos recoger las diferentes representaciones gráficas que los alumnos daban al número negativo. Como se comentó anteriormente los alumnos interpretaron la actividad de manera diferente y en su mayoría contestaron expresando verbalmente diversas situaciones y no representaciones simbólicas o gráficas.

Por ello, en este punto solo haremos el análisis en aquellas respuestas que sí consistieron en representaciones gráficas, ya que las restantes se agrupan en las actividades anteriores y el análisis ya se ha realizado.

- A consecuencia del tipo de respuestas obtenidas, debíamos reformular el enunciado de la actividad para obtener la información que realmente queríamos.
- A pesar de ello hemos obtenido 2 tipos de representaciones de los números negativos: símbolos y recta real.
- Dentro de los símbolos hemos observado que se utilizan variaciones en la escritura para representar un mismo elemento, como por ejemplo,  $-5$ ,  $(-5)$ ,  $-5/1$ .
- Todos los alumnos que eligen como forma de representación la recta real lo hacen en posición horizontal, excepto uno que la toma en posición vertical.

### 5.4. Mapa conceptual

Presentamos una serie de mapas conceptuales y tablas que recogen las distintas respuestas que dieron los alumnos en las actividades analizadas.

En la figura 5.1. se muestra el triángulo semántico, donde destacan los componentes de significado detectados a través del análisis de las actividades realizadas por los alumnos, a saber, actividades 1 y 2; 6 y 7; y 5.

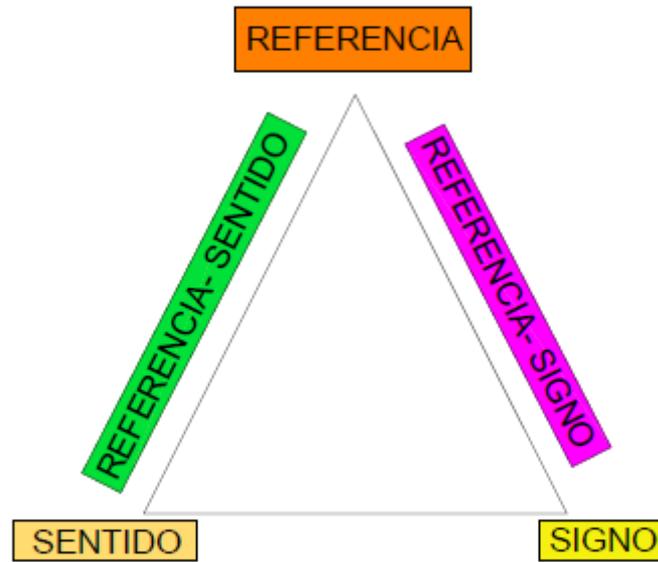


Figura 5.1. Triángulo semántico de Frege

A continuación mostramos los mapas conceptuales que resumen el análisis de las relaciones Referencia – Sentido (figura 5.2.) y Referencia – Signo (figura 5.3.).

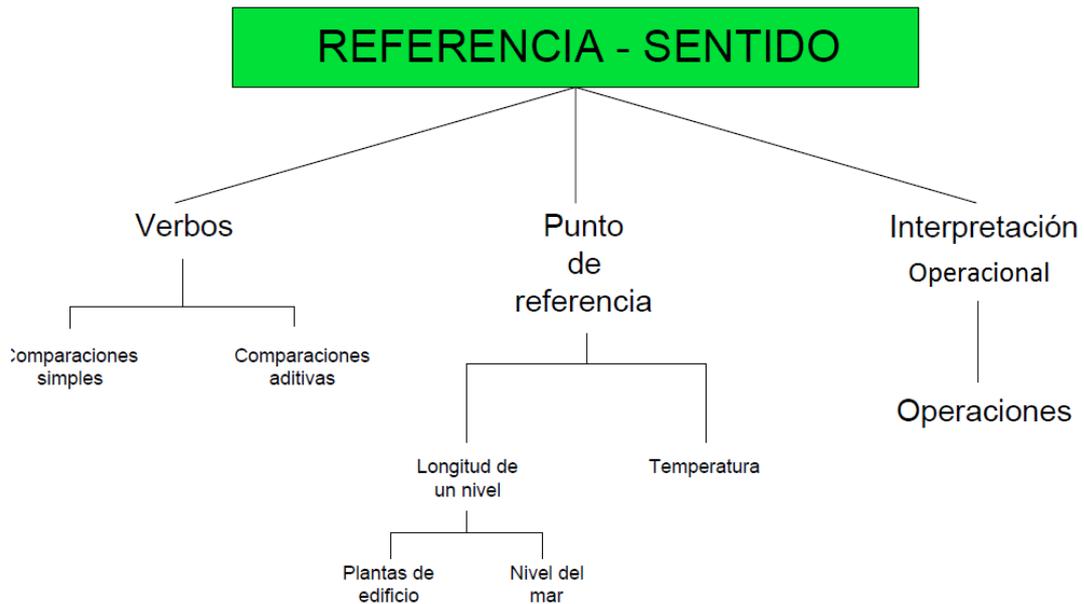
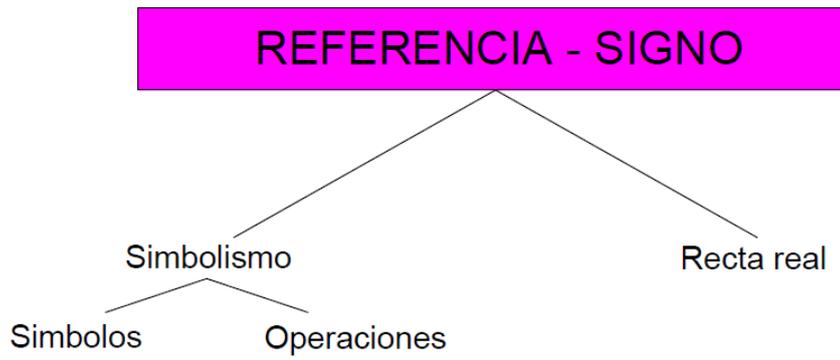


Figura 5.6. Mapa conceptual de la relación Referencia – Sentido



*Figura 5.7.* Mapa conceptual de la relación Referencia – Signo

## **5.5. Logros y limitaciones de la investigación**

Consideramos que los logros más notables obtenidos en este estudio han sido la clasificación de todas las representaciones verbales recogidas según las componentes del triángulo semántico, identificando a su vez estructuras sintácticas comunes. Así como la clasificación de las diferentes representaciones gráficas y simbólicas puestas de manifiesto por los estudiantes en cuestiones referentes al concepto de número entero. Hemos detectado que en su conjunto los alumnos tienen un pensamiento relativo en esta cuestión, es decir, dan a los negativos el significado de número natural relativo descrito por González Marí (1998).

Dentro de las competencias requeridas en el programa del Máster en Didáctica de la Matemática se precisa a llevar a cabo:

- Un planteamiento y evaluación de un problema de investigación en Didáctica de la Matemática.
- Una delimitación del marco metodológico, diseño y componentes de una investigación en Didáctica de la Matemática.
- Una selección, elaboración, análisis e interpretación de los datos en una investigación en educación matemática.

Considero que con esta memoria he progresado en los puntos señalados, además de formarme como investigador, ya que me ha permitido tener cierta autonomía, siempre acogiéndome a las directrices de mi tutor, a la hora de realizar el análisis de datos, por ejemplo.

Dentro de las limitaciones de la investigación se señala el tamaño limitado de la muestra, elegida de manera intencional y por disponibilidad. Han participado alumnos procedentes del segundo curso de educación secundaria obligatoria del Colegio Cristo de la Yedra de Granada, en el año académico 2013/2014. Esto supone, en términos estadísticos, que no nos hemos propuesto una generalización de los resultados.

La recogida de datos se realizó en un momento concreto y no a lo largo de un periodo más amplio de trabajo, por lo que no se han recogido evidencias sobre cambio y desarrollo de tales significados; para ello hubiera sido necesario disponer de

información de varios momentos del proceso de aprendizaje de los sujetos. Por lo que esto también delimita los análisis y las conclusiones de nuestros hallazgos.

No está en nuestro interés ni se ha pretendido controlar la metodología seguida por los docentes a cuyos alumnos encuestamos para impartir este concepto en el aula de secundaria. Nuestro conocimiento directo del Colegio Cristo de la Yedra garantiza que se trata de docentes con buena formación, experiencia y perfil profesional, que siguen un método de trabajo en el aula de matemáticas, determinado por la normativa curricular vigente y el libro de texto de la Editorial SM.

Estas limitaciones son debidas en gran parte a las propias condiciones en las que este Trabajo de Fin de Máster tiene lugar, cuya realización completa está prevista en su Guía Docente para un cuatrimestre. En las condiciones planteadas y con las competencias establecidas en el Verifica de la titulación, entendemos que el trabajo que se presenta responde a los requerimientos establecidos de manera adecuada, de manera que hemos trabajado intensamente en el mismo.

Se reconocen también ciertas limitaciones del propio instrumento de recogida de datos. Estas limitaciones deberán corregirse para futuras aplicaciones. Hemos diseñado y aplicado un cuestionario con doce preguntas, cuyos resultados analizados en este estudio, se limitan a cinco de ellas, concretamente, las actividades 1, 2, 5, 6 y 7.

## **5.6. Sugerencias para investigaciones futuras**

Los resultados del trabajo de investigación marcan las sugerencias para futuros trabajos. Así, parte importante de nuestro análisis se ha centrado en la relación entre dos de las componentes del significado de un concepto matemático escolar: Referencia – Sentido. Por lo que una propuesta abierta para continuarlo consistiría en abordar la relación de significado Sentido – Signo, que es el único lado del triángulo semántico que apenas se ha tratado, aunque hemos obtenido algunos datos hemos decidido no abordarlo.

Otra opción abierta es la profundización de la relación de significado entre Referencia – Signo, ya que como hemos comentado no se han obtenido los resultados esperados, debido a la interpretación del enunciado por parte de los alumnos.

Por último, sería conveniente, para futuras investigaciones relacionadas por este tema, mejorar la representatividad de la muestra para mejorar datos relativos a los

sentidos, signos y referencias que los alumnos puedan utilizar sobre los conceptos relacionados con los números enteros.



## REFERENCIAS

- Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las ciencias*, 4(3), (pp. 199-208).
- Becerra, O., Buitrago, M., Calderón, S. y Gómez, P. (2013). *Uso de la sumadora de enteros en la adición y sustracción de números enteros. Curso dictado en Materiales y recursos en el aula de matemáticas* (Agosto 17 de 2013). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Becerra, O., Buitrago, M., Calderón, S. y Gómez, R. (2012). *Experiencia de aula: adición y sustracción de números enteros*. En Obando, Gilberto (Ed.), *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 1114-1119). Medellín, Colombia: Sello Editorial Universidad de Medellín.
- Bouvier y George (1986). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid, España: AKAL.
- Bruno, A. (1997) La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *Números*, 29, (pp. 5-18).
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En Rico, L. (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.
- Castro-Rodríguez, E. (2010). *Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación inicial*. Memoria final del Máster en Didáctica de la Matemática. Granada, España: Universidad de Granada.
- Cobo, F., Fernández, E. y Rico, L. (1985). Las situaciones reales de los problemas aritméticos. *Actas de las II jornadas andaluzas de profesores de matemáticas. Sociedad andaluza de profesores de matemáticas "Thales"* (pp. 249-267) Almería, España: SAEM Thales

- Fernández-Plaza, J. A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio exploratorio*. Memoria final del Máster en Didáctica de la Matemática. Granada, España: Universidad de Granada.
- Frege, G. (1996a). Sobre sentido y referencia. En Mosterín J. (Ed.). *Escritos Filosóficos*. Barcelona, España: Crítica.
- Frege, G. (1996b). Consideraciones sobre sentido y referencia. En Mosterín J. (Ed.). *Escritos Filosóficos*. Barcelona, España: Crítica.
- Frege, G. (1996c). Función y concepto. En Mosterín J.(Ed.). *Escritos Filosóficos*. Barcelona, España: Crítica.
- Gallardo, A. y Rojano, T. (1990). Los números negativos en el contexto de la resolución de ecuaciones algebraicas. Un análisis histórico-epistemológico. *Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Sevilla, España: SAEM Thales
- Gallardo, A. y Saavedra G. (2011). Significados de los números negativos fraccionarios en estudiantes de secundaria. Investigación en Educación Matemática XV. En (Eds.) M. Marín y L. J. Blanco. *XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. (pp. 361-369). Ciudad Real, España: SEIEM
- Gallardo, A., Santos, N. y Hernández, J. A. (2010). La aparición simultánea de los sentidos de uso de los números negativos y el cero en alumnos de secundaria. Un estudio de caso. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 303-314). Lleida, España: SEIEM
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.
- González Marí, J. L. (1998). *Números naturales relativos*. Granada, España: Editorial Comares.

- Guil, D., Maqueda, E., Brisuela, J., Rodríguez, S. (2007) Números enteros. *En Diseño curricular para la educación secundaria 2º año (SB). Matemáticas.* (pp. 323-326) Buenos Aires, Argentina: Gobierno de la Provincia de Buenos Aires.
- Iriarte, M., Jimeno, M. y Vargas-Machuca, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Suma*, 7, (pp. 13-18).
- Kaput, J. J. (1987). Representations systems and mathematics. En C. Javier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 19–26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Martín, E. (2013). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica. Estudio exploratorio.* Memoria final del Máster en Didáctica de la Matemática. Granada:, España Universidad de Granada.
- Maz, A. y Rico, L. (2009) Números negativos en los siglos XVIII y XIX: fenomenología y representaciones. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1).
- Maz, A. y Rico, L. (2007). Situaciones asociadas a los números negativos en textos de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX. *PNA*, 1(3), (pp. 113-123).
- McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa* (5ª edición). Madrid: Pearson Addison Wesley.
- Real academia española (1991). *Esbozo de una nueva gramática de la lengua española.* Madrid, España: Espasa-Calpe.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, (pp. 39 – 63).
- Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista iberoamericana de educación matemática. Unión*, 33, (pp. 11–27).
- Rico, L. (2007). *Sistemas de significados de un concepto en las Matemáticas Escolares.* Documento no publicado. Granada, España: Universidad de Granada.

Sierra, M., González-Astudillo, M.T. y López-Esteban, C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *Aula, 10*. (pp. 89-104). Salamanca, España: Universidad de Salamanca

Soto, E. (2011). *Diccionario ilustrado de conceptos matemáticos*. Versión electrónica de distribución gratuita. México. Disponible en:  
<http://www.aprendematematicas.org.mx/obras/DICM.pdf> (15/05/2014)

Vargas-Machuca, I., Jimeno, M. e Iriarte, M. (1990). *Números enteros*. Madrid, España: Síntesis

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas

Word Press (2014) *Diccionario de matemáticas*. Disponible en:  
[http://www.sanrod.org/matematicas/index.php?option=com\\_content&view=categories&id=98&Itemid=560](http://www.sanrod.org/matematicas/index.php?option=com_content&view=categories&id=98&Itemid=560) (17/05/2014)

